ЛЕКЦИЯ 3

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ
ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Энергетический баланс потока идеальной жидкости

Рассмотрим стационарное движение физически бесконечно малого объёма идеальной жидкости по линии тока, как известно, совпадающей с траекторией движения этой жидкой частицы. В проекциях на оси координат это движение описывается системой уравнений Эйлера(2.6).

Умножим правые и левые части системы уравнений (2.6) на соответствующие проекции элементарного пути пройденного частицей: *dx, dy, dz*:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{d\upsilon_x}{dt}dx &= -\frac{\partial P}{\partial x}dx \\ \rho\frac{d\upsilon_y}{dt}dy &= -\frac{\partial P}{\partial y}dy \\ \rho\frac{d\upsilon_z}{dt}dz &= -\frac{\partial P}{\partial z}dz - \rho g dz \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.)$$

Просуммировав левые и правые части этих уравнений с учетом того, что

$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x$, $\frac{dy}{dt} = \upsilon_y$, $\frac{dz}{dt} = \upsilon_z$ получим

$$\rho d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) + \rho g dz = -dP \qquad (3.2)$$

В случае несжимаемой жидкости уравнение (3.2) упрощается

$d\left(\rho\frac{\upsilon^2}{2} + P + \rho g z\right) = 0$, следовательно

$$\rho\frac{\upsilon^2}{2} + P + \rho g z = const \qquad (3.3)$$

Чаще это уравнение записывают в таком виде:

$$\frac{\upsilon^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = c \qquad (3.4)$$

Величина константы *c* меняется для различных линий тока.

Таким образом, получено уравнение энергетического баланса движения элементарного объёма несжимаемой идеальной жидкости по линии тока, называемое уравнением Бернулли. Согласно этому уравнению сумма удельной (отнесённой к единице веса) кинетической энергии $(\frac{\upsilon^2}{2g})$ и потенциальной энергии давления и положения $(\frac{P}{\rho g}+z)$ есть величина постоянная для любой точки на линии тока.

Все составляющие этого уравнения имеют размерность длины и называются напорами или высотами, а именно:

$\frac{P}{\rho g}$ – пьезометрический напор (пьезометрическая высота, пропорциональная давлению в рассматриваемом сечении, или удельная потенциальная энергия давления столба жидкости, [м] = [Па/((кг/м^3)(м/с^2))]);

z – геометрический напор (нивелирная высота расположения сечения элементарной струйки жидкости над некоторой плоскостью сравнения, или удельная потенциальная энергия положения, [м] = [Дж/Н]);

$\frac{\upsilon^2}{2g}$ - скоростной или динамический напор (удельная кинетическая энергия, [м] = [(м/с)^2/(м/с^2)]).

В гидравлике удельная энергия единицы веса жидкости называется «*гидравлическим напором*», или просто – «*напором*», и обозначается символом H (от англ. head – напор).

Уравнение Бернулли показывает, что при установившемся движении идеальной жидкости сумма геометрического, пьезометрического и динамического напоров в каждом поперечном сечении элементарной струйки есть величина постоянная, то есть H = const.

Для конечных сечений потока параметры уравнения (3.4) осредняют по всем линиям тока, т.е. по всему сечению, при этом вместо скорости в точке используют среднюю скорость по поперечному сечению (υ_{cp}), поэтому удельная кинетическая энергия, рассчитанная по средней скорости, умножается на поправочный коэффициент α, зависящий от распределения скорости по сечению потока

$$\alpha = \frac{\iint\limits_S \upsilon^3 dS}{\upsilon_{cp}^3 S} \tag{3.5}$$

В технических расчётах обычно принимают α =1 по следующим причинам. Величина α при больших скоростях турбулентного течения незначительно превышает *1*; при малых скоростях, соответствующих ламинарному движению α = *2*. Но поскольку сама величина кинетической энергии в этом случае очень мала по сравнению с величинами потенциальной энергии, приравнивание α единице не вносит существенных погрешностей в расчёты.

При средних скоростях турбулентной области из-за сравнительно малой величины кинетической энергии погрешности также незначительны.

Таким образом, уравнение Бернулли для конечных сечений потока несжимаемой идеальной жидкости:

$$\frac{\upsilon_{cp}^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = const$$

В технических расчётах обычно используют средние по сечению величины скоростей, поэтому принимаем обозначения $\upsilon_{cp} = \upsilon$, тогда уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{\upsilon^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = const \qquad (3.6)$$

Следовательно, уравнение Бернулли для любых сечений потока идеальной жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{\upsilon_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\upsilon_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = \ldots = \frac{\upsilon_i^2}{2g} + \frac{P_i}{\rho g} + z_i \qquad (3.7)$$

Практическое приложение уравнения Бернулли

Измерение расходов жидкостей и газов дроссельными устройствами

Дроссельные приборы

Принцип действия дроссельных приборов основан на измерении перепада давления в трубе, создаваемого путем резкого сужения сечения потока. К дроссельным приборам относят: диафрагму, сопло и трубу Вентури.

Дифрагма

Диафрагма представляет собой тонкий металлический диск с круглым отверстием посередине, размещаемый внутри трубы, поперек потока (Рис.3.1). Диаметр отверстия диафрагмы d_0 значительно меньше диаметра d_1 трубы, на которой устанавливается диафрагма. За диафрагмой струя жидкости продолжает сжиматься, поэтому на некотором расстоянии за диафрагмой при максимальном сжатии потока диаметр струи становится равным d_2, причем $d_2 < d_0$. К сечениям 1 и 2 присоединен U- образный дифманометр. Найдем разность давлений в сечениях 1 и 2, используя уравнение Бернулли:

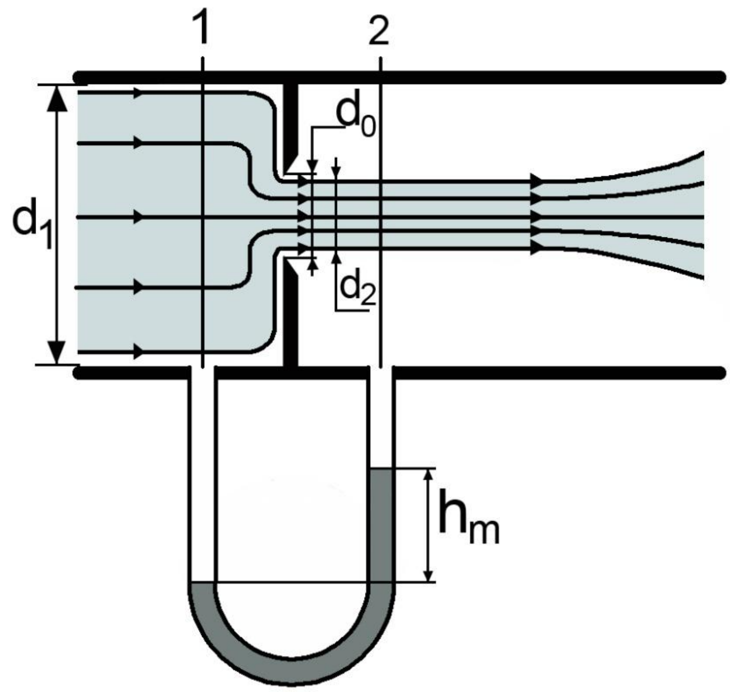

Рис.3.1. Диафрагма, размещенная в трубе и снабженная U- образным дифманометром

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\upsilon_2^2}{2g}$$

С учетом того, что для горизонтальной трубы $z_1 = z_2$, уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \frac{\upsilon_2^2}{2g} - \frac{\upsilon_1^2}{2g}$$

или $$P_1 - P_2 = \frac{\upsilon_2^2 \rho}{2} - \frac{\upsilon_1^2 \rho}{2} \qquad (3.8)$$

Ранее было получено выражение (2.14) для определения перепада давления в трубопроводе через показания U-образного дифманометра h_M:

$$P_1 - P_2 = (\rho_м - \rho) g h_м$$

Также из условия постоянства объемных расходов капельных жидкостей следует:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \frac{S_2}{S_1} = \upsilon_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2, \qquad (3.9)$$

Подставим выражения (2.14) и (3.9) в уравнение (3.8)

Тогда $\upsilon_2 = \sqrt{2gh_м \dfrac{\rho_м - \rho}{\rho}} \Big/ \left(1 - \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^4\right)^{1/2}$ (3.10)

Заменим $h_м \dfrac{\rho_м - \rho}{\rho} = h$, где h – показания дифманометра, переведенные в м. ст. рабочей жидкости

Объемный расход жидкости в отверстии диафрагмы: $\dot{V} = \upsilon_0 S_0$.

Скорость жидкости в отверстии диафрагмы υ_o определяет значение скорости υ_2:

$$\upsilon_0 = \alpha_\partial \upsilon_2, \tag{3.11}$$

где α_∂ - экспериментально определенный коэффициент расхода диафрагмы, учитывающий потери энергии в отверстии диафрагмы и сужение струи.

Тогда объемный расход жидкости в отверстии диафрагмы и в трубе:

$$\dot{V} = \alpha_\partial S_0 \sqrt{\frac{2gh}{1-(\frac{d_2}{d_1})^4}} \tag{3.12}$$

Для технических расчетов с достаточной степенью точности (1- 3 %) можно использовать формулу: $\dot{V} = \alpha_\partial S_0 \sqrt{2gh}$ (3.13)

С целью снижения гидравлических потерь на острых кромках диафрагмы вместо нее для определения расходов жидкостей могут устанавливаться сопла с гладким входом.

Расходомерная труба Вентури

Расходомерная труба Вентури (Рис.3.2) устанавливается в случае, если нежелательны большие потери напора в суживающим устройстве.

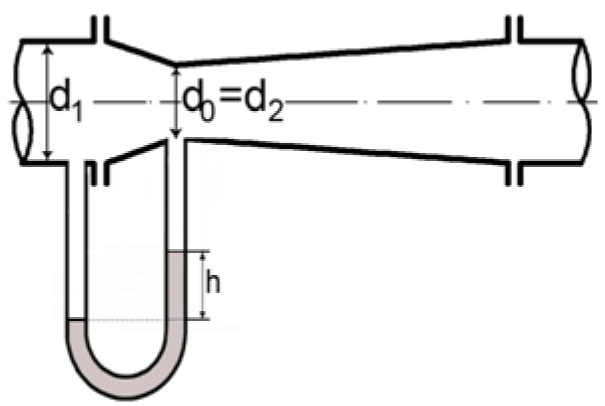

Рис.3.2. Расходомерная труба Вентури

Основной недостаток трубы Вентури по сравнению с диафрагмой - громоздкость. Расход жидкости по трубе определяется по формуле, аналогичной (3.13) для диафрагмы: $\dot{V} = \alpha_B S_0 \sqrt{2gh}$, где α_B- коэффициент расхода трубы Вентури.

Расходомерные трубки Пито-Прандтля

Трубки Пито-Прандтля (Рис. 3.3) представляют собой две тонкие трубки (пьезометры) диаметром 1-2 мм, расположенные на одном уровне. Одна из трубок (трубка Пито) изогнута под прямым углом, открытым концом направлена в сторону набегающего потока, вторая трубка - прямая, расположена поперек потока. Трубка Пито воспринимает полное давление потока (динамическое и статическое), а вторая (прямая) трубка – только статическое. Разность этих двух давлений Δp_i эквивалентна динамическому давлению потока в том месте сечения, где находится трубка Пито:

$$\Delta p_i = \frac{\rho \upsilon_i^2}{2} \qquad (3.14)$$

где ρ – плотность среды в трубопроводе, кг/м^3; υ_i – локальная скорость потока в точке измерения, м/с.

Возникающая разность давлений определяется дифференциальным манометром:

$$\Delta p_i = (\rho_M - \rho) g h_{мi} \quad , \qquad (3.15)$$

где $\rho_м$ – плотность манометрической жидкости, кг/м^3; $h_{м\,i}$ – высота столба манометрической жидкости (показание дифманометра), м.

Таким образом, из соотношений (3.14) и (3.15) определяют локальную скорость потока υ_i (в месте нахождения трубки Пито):

$$\upsilon_i = \sqrt{2gh_{мi} \frac{\rho_м - \rho}{\rho}}$$

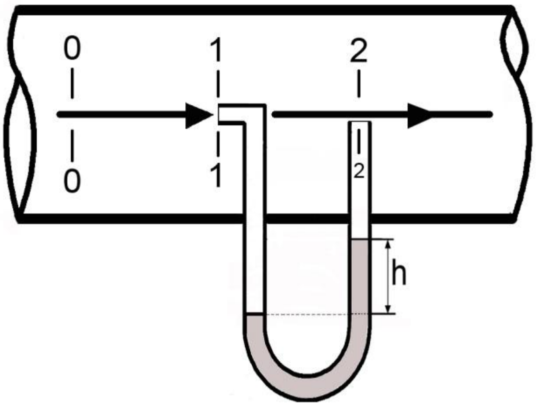

Рис.3.3. Трубки Пито-Прандтля

Средняя скорость потока определяется выражением:

$$\upsilon_{cp} = \frac{1}{S}\int_S \upsilon_i\, dS = \frac{2}{R^2}\int_{r_i=0}^{r_i=R} \upsilon_i\, r_i\, dr, \qquad . \qquad (3.16)$$

полученным с учётом того, что площадь круга радиусом R равна $S = \pi R^2$, а $dS=2\pi r\, dr$. Зная среднюю скорость, можно вычислить расход жидкости в трубе.

Истечение жидкости из отверстия в днище сосуда

1. При постоянном уровне жидкости в сосуде

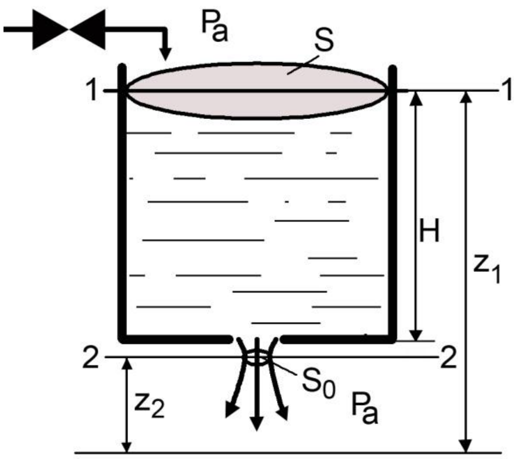

Рис.3.4. Сосуд с постоянным уровнем жидкости

Рассмотрим процесс истечения через небольшое отверстие в дне сосуда при условии равенства количества поступающей в сосуд жидкости и расхода ее через отверстие. Т.о., истечение происходит при постоянном уровне жидкости в сосуде и при атмосферном давлении. Запишем уравнение Бернулли для идеальной жидкости для плоскостей сравнения 1 и 2, причем плоскость 1 проходит по уровню жидкости в сосуде, а плоскость 2 - в самом узком сечении струи, чуть ниже отверстия в днище:

$$z_1+\frac{P_1}{\rho g}+\frac{\upsilon_1^2}{2g}=z_2+\frac{P_2}{\rho g}+\frac{\upsilon_2^2}{2g}$$

Поскольку истечение происходит при атмосферном давлении, $P_1 = P_2 = P_{атм}$, уровень жидкости в сосуде постоянен: $\upsilon_1 = 0$, сечение 2 проходит несколько ниже дна сосуда, в технических расчетах можно принять z_1-z_2= H.

Тогда уравнение Бернулли можно записать как:

$$H=\frac{\upsilon_2^2}{2g}$$

или $$\upsilon_2=\sqrt{2gH} \qquad (3.17)$$

Уравнение (3.17) - это формула Торричели (1643 год).

При расчете течения реальной жидкости следует учесть потери напора и эффект сжатия струи при выходе из отверстия. Фактическая скорость истечения рассчитывается по формуле: $\upsilon_0 = \alpha\upsilon_2$, где коэффициент расхода $\alpha = \varepsilon\ \varphi$.

Коэффициент сжатия струи ε равен отношению площади сечения струи в месте наибольшего сжатия $S_{сж}$ к сечению отверстия S_0 : $\varepsilon = S_{сж}/ S_0$. ε <0, определяется опытным путем.

Потерю напора в отверстии за счет трения учитывают коэффициентом скорости φ, значения которого лежат в пределах 0,95-0,99 .

Тогда расход жидкости через отверстие: $\dot{V}=\upsilon_0 S_0=\alpha S_0\sqrt{2gH}$

Коэффициент расхода α - справочная величина, зависящая от режима истечения. α изменяется в пределах от 0,58 до 0,75.

Из полученных зависимостей видно, что расход жидкости через отверстие не зависит от формы сосуда, поэтому уравнение расхода можно применять и при истечении из боковых отверстий.

2. При переменном уровне жидкости в сосуде

Задача об истечении жидкости при переменном напоре обычно сводится к определению времени опорожнения всего сосуда в зависимости от начального наполнения, формы и размеров сосуда и отверстия. В этом случае вследствие непрерывного изменения напора, а следовательно, и непрерывного изменения скоростей и давлений, всегда наблюдается неустановившееся движение жидкости, поэтому при расчетах нельзя использовать обычное уравнение Бернулли.

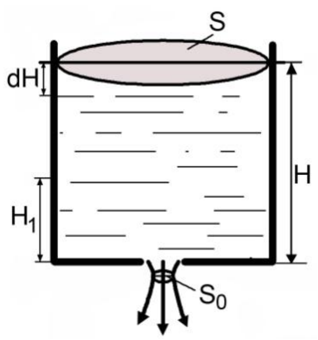

Рис.3.5. К выводу уравнения для определения времени истечения с переменным уровнем жидкости в сосуде

Для решения задачи полное время истечения жидкости разбиваем на бесконечно малые промежутки времени dt, в течение каждого из которых напор считаем постоянным, а движение жидкости установившемся.

Рассмотрим истечение жидкости в атмосферу через отверстие в дне сосуда из открытого вертикального цилиндрического сосуда с сечением *S*.

Элементарный объем жидкости *dV*, прошедшей через отверстие за бесконечно малый промежуток времени *dt*, рассчитывается по формуле

$$dV = \alpha S_0 \sqrt{2gH} dt \tag{3.18}$$

Величину *H* в течение времени *dt* примем постоянной.

В действительности за это время уровень жидкости в сосуде опустится на величину *dH* и объем жидкости в нем изменится на *dV:*

$$dV = -SdH \tag{3.19}$$

Знак «минус» показывает, что с течением времени величина *H* уменьшается и, следовательно, *dH* будет отрицательной.

Приравняем выражения (3.18) и (3.19). Полное время опорожнения сосуда определим в результате интегрирования уравнения:

$$\int_0^t dt = (\alpha S_0 \sqrt{2gH})^{-1} \int_H^0 \frac{S}{\sqrt{H}} dH$$

При *S*=const $$t = \frac{2S\sqrt{H}}{\alpha S_0 \sqrt{2g}} \tag{3.20}$$

Для определения времени истечения только части объема от *H* до H_1:

$$t = \frac{2S(\sqrt{H} - \sqrt{H_1})}{\alpha S_0 \sqrt{2g}} \tag{3.21}$$

Если сечение аппарата изменяется (конический резервуар, горизонтальная цистерна), т.е. *S* величина переменная, необходимо использовать зависимость *S=f(H)*. Такие задачи решают при наполнении и опорожнении резервуаров, цистерн, водохранилищ.