Лекция 3

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МАССЫ И ЭНЕРГИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА МАССЫ
УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ.

Балансовые уравнения переноса массы и энергии в дифференциальной форме

Рассмотрим газовую или жидкую среду. При локальном равновесии «точка среды» характеризуется своим местным значением концентрации, температуры, давления и пр. Будем считать, что все точки среды находятся в неравновесном состоянии, а в неравновесной среде существуют поля концентраций, температур, давлений. Если в сплошной среде существуют градиенты вышеупомянутых параметров, то они вызывают перенос массы и энергии.

Иными словами, выделенный объект находится в неоднородном поле так называемого потенциала переноса. Под потенциалом переноса φ (скалярная величина) понимают удельную, отнесённую к единице объёма, массу или энергию.

Ранее в первой части курса (см.лекция 10) было получено основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии (10.17):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\,(\vec{q}) = 0 \tag{3-1}$$

В случае переноса массы под потенциалом переноса обычно понимают концентрацию компонента:

$$\varphi = \frac{m_i}{V} = \rho_i$$

где m_i – масса i-го компонента в объёме V, $[кг\ i]$;

ρ_i – концентрация i-го компонента в смеси, $\left[\frac{кг\ i}{м^3}\right]$

$\vec{q}$ — плотность потока массы, $\left[\frac{кг}{м^2 с}\right]$

Из курса математики известно, что скалярная функция φ называется потенциалом векторной $\vec{q}$, если между ними существует связь в указанной форме:

$$\vec{q} = -grad\ \varphi = -\nabla\varphi \tag{3.2}$$

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объёме *V*.

Молекулярный перенос является определяющим в неподвижных средах, хотя он вызывает естественную конвекцию и практически всегда ею сопровождается.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Перенос массы по молекулярному механизму (диффузия) подчиняется первому закону Фика:

$$\vec{q}_{Mm} = -Dgrad\rho_i \tag{3.3}$$

где: D – коэффициент молекулярной диффузии, $\left[м^2/c \right]$; $\vec{q}_{Mm}$ - плотность массового потока, $\left[\frac{кг\ i}{м^2 c} \right]$

При конвективном переносе масса и энергия транспортируются макроскопическим путём, движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}$ средой. Плотность конвективного потока массы и энергии на каждом участке поверхности ΔA можно выразить следующим образом:

$$\vec{q}_K = \frac{\vec{\upsilon}\,\Delta A\,\varphi}{\Delta A} = \vec{\upsilon}\,\varphi \tag{3.4}$$

где ΔA – участок поверхности, ориентированный перпендикулярно вектору скорости $\vec{\upsilon}$. В случае конвективного переноса массы:

$$\vec{q}_{Km} = \frac{\vec{\upsilon}\,\Delta A\,\rho}{\Delta A} = \vec{\upsilon}\,\rho \tag{3.5}$$

Таким образом, в случае молекулярного и конвективного переноса массы общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_{Mm} + \vec{q}_{Km} \tag{3.6}$$

Тогда основное дифференциальное уравнение переноса массы при отсутствии стока или притока массы внутри объема будет иметь вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,(\vec{q}_{Mm} + \vec{q}_{Km}) = 0 \tag{3.7}$$

Уравнение было получено при следующих условиях:

1. Процесс переноса неустановившийся ($\frac{\partial\varphi}{\partial t} \neq 0$);

2. Процесс переноса протекает в условиях установившегося движения жидкости

($\partial \upsilon / \partial t = 0$);

3. Свойства жидкости однородны и изотропны: $\rho = const, D = const$.

В случае изотропных сплошных сред с помощью этого уравнения можно получить поля концентраций (или температур) в однофазной среде. Искомой величиной является плотность потока субстанции $\vec{q}$, которая определяет удельный поток массы (или энергии).

Уравнение конвективной диффузии

Это уравнение является частным случаем уравнения (3.7) при постоянной плотности (общей концентрации) ρ, постоянном коэффициенте диффузии D и отсутствии объёмных источников (стоков) массы R = 0, которые возникают в результате химической реакции в рассматриваемом объеме т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\vec{q}_{Mm} + \vec{q}_{Km}) = 0$$

Т.к.

$\vec{q}_{Mm} + \vec{q}_{Km} = -Dgrad\,\rho + \vec{\upsilon}\rho$,

То:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(-Dgrad\,\rho + \vec{\upsilon}\rho) = 0 \qquad (3.8)$$

При $D = const$ получим:

$$div\,(-Dgrad\,\rho\;) = -D\nabla^2\rho = -D\Delta\rho \qquad (3.9)$$

где ∇^2, Δ – оператор Лапласа.

(Дифференциальная операция div grad φ сопоставляет скалярную функцию φ и скалярную функцию

$$\mathrm{div\,grad}\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi)$$

Дивергенцию от $(\vec{\upsilon} \cdot \rho)$, как произведения векторной и скалярной величины, можно представить в виде:

$$div\;\vec{\upsilon}\rho = \rho\,div\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\,grad\,\rho \qquad (3.10)$$

тогда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \, div \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon} \, grad \, \rho = D \nabla^2 \rho \qquad (3.11)$$

Для случая $\rho = \text{const}$ (несжимаемые среды) с учетом уравнения неразрывности:

$$div \ \vec{\upsilon} = 0$$

соотношение (3.11) принимает следующую форму:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\upsilon} grad \, \rho = D \nabla^2 \rho \qquad (3.12)$$

Разделив каждый член уравнения на молярную массу распределяемого компонента (M – постоянная величина), с учётом $\frac{\rho}{M} = C$ – объёмная мольная концентрация $\left[\frac{км \ комп}{м^3} \right]$, будем иметь:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\upsilon} \ grad \ C = D \ \nabla^2 C \qquad (3.13)$$

Соотношение (3.13) называется уравнением конвективной диффузии и является частным случаем дифференциального баланса массы в движущейся среде, где имеет место диффузионный перенос. При этом накладываемые на него ограничения $(\rho, D = const)$ позволяют использовать его, как правило, для сред с небольшой концентрацией компонентов.

Полная форма уравнения конвективной диффузии в скалярном виде будет:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} = D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}) \qquad (3.13 \text{ а})$$

Член $\partial C / \partial \tau$ - учитывает изменение концентрации во времени в данной точке пространства;

$\vec{\upsilon} \ grad \ C$ -учитывает изменение концентрации за счет конвекции;

$D \nabla^2 C$ - учитывает изменение концентрации за счет диффузии.

Уравнения (3-13 и (3-13а) по структуре аналогичны дифференциальному уравнению конвективного теплообмена (уравнение Фурье-Кирхгофа).

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\upsilon} \ grad \ T = a \ \nabla^2 \ T$$

Сопоставление уравнений конвективного масообмена и конвективного теплообмена показывает, что

Коэффициента диффузии D – аналог коэффициента температуропроводности a;

Концентрация C – аналог температуры T.

Отметим, что левую часть этого соотношения можно представить как субстанциональную производную

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} + \upsilon_z \frac{C}{\partial z} \qquad (3.14)$$

состоящую из локальной и конвективной компонент.

Дифференциальное уравнение конвективной диффузии описывает в общем виде распределение концентраций в движущейся жидкости (с учетом принятых допущений).

Для частного случая, установившегося массообмема

$$\vec{\upsilon}\, gradC = D\nabla^2 C \qquad (3.15)$$

Или в развернутом виде:

$$\upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} = D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}) \qquad (3.15a)$$

В неподвижной среде $\vec{\upsilon} = 0$ и выражение (3.13) принимает форму:

$$\partial C_A / \partial t = D\nabla^2 C \qquad (3.16)$$

Уравнение (3.16) называется вторым законом Фика и описывает нестационарную диффузию в неподвижной среде.

Уравнения неразрывности (сплошности) для двухкомпонентной системы

Пусть имеется гомогенная смесь компонентов A и B с концентрациями ρ_A и ρ_B, где протекает реакция $B \rightarrow A$. Для смеси компонентов выполняется правило:

$$\rho = \rho_A + \rho_B, \qquad (3.17)$$

причём $\rho = const$.

Тогда, для компонентов A и B в случае переноса массы будем иметь:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + div\, \vec{q}_A = R_A \qquad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + div\, \vec{q}_B = -R_B \qquad (3.19)$$

$$\vec{q}_A = -D_{AB}\, grad\, \rho_A + \rho_A \vec{\upsilon} \qquad (3.20)$$

$$\vec{q}_B = -D_{BA}\, grad \rho_B + \rho_B \vec{\upsilon} \qquad (3.21)$$

Здесь согласно уравнению (3.6) имеем:

Подставляя (3.20) в (3.18) и (3.21) в (3.19) получим:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -div\,(-D_{AB} grad\,\rho_A + \rho_A \vec{\upsilon}) + R_A \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} = -div\,(-D_{BA} grad\,\rho_B + \rho_B \vec{\upsilon}) - R_B \qquad (3.23)$$

Выражения (3.22) и (3.23) называются уравнениями неразрывности (сплошности) для компонентов смеси и описывают нестационарные поля концентраций компонентов *A* и *B* в движущейся среде: $\rho_A = f_1(\tau, x, y, z)$ и $\rho_B = f_1(\tau, x, y, z)$.

При сложении (3.22) и (3.23) получим уравнение неразрывности для смеси.

С учётом соотношений:

$$(-D_{AB}\,\mathrm{grad}\,\rho_A) + (-D_{AB}\,\mathrm{grad}\,\rho_A) = \left[-D_{AB}\,\mathrm{grad}\,\rho_A\right] + \left[-D_{AB}\,\mathrm{grad}(\rho - \rho_A)\right] = 0$$

Поскольку $grad\,\rho = 0$ при $\rho = const$ (для двухкомпонентной системы D_{AB}=D_{BA}

$$R_A\text{-}R_B = 0$$

Последнее выражение фактически означает, что источником *A* является *B,* и, скажем, из 1 кг *B* может образоваться только 1 кг *A*. С учетом выше изложенного будем иметь:

$$\frac{\partial(\rho_A + \rho_B)}{\partial t} = -div\left[(\rho_A + \rho_B)\vec{\upsilon}\right]$$

или:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho\vec{\upsilon}) = 0, \qquad (3.24)$$

Полученное соотношение называется уравнением неразрывности (сплошности) потока. Это выражение можно получить и для потока чистых жидкостей (газов), движущихся без пустот при отсутствии источников (стоков) массы и, естественно, диффузии. В этом случае потенциалом переноса является плотность *($\varphi = \rho$)* и перенос осуществляется только конвективным путём ($q_M = 0$, нет диффузии за отсутствием градиента концентрации).

Для установившегося потока $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$ Тогда:

$$div\,(\rho\vec{\upsilon}) = 0, \qquad (3.25)$$

Соотношение (3.25) является уравнением неразрывности для установившегося потока.

$$div\ \vec{\upsilon} = 0 \text{ или } \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.26)$$

С учётом $\rho(x, y, z) = const$ для несжимаемых жидкостей получим:

Поскольку $\rho \neq 0$, будем иметь:

Уравнение (3.26) является дифференциальным уравнением неразрывности потока несжимаемой жидкости при установившемся движении.

В интегральной форме уравнение неразрывности было получено в первой лекции первой части курса:

$$\mathrm{M} = \left(\rho\upsilon\right)_{cp1} \cdot \mathrm{S}_1 = \left(\rho\upsilon\right)_{cp2} \cdot \mathrm{S}_2 = \ldots = \left(\rho\upsilon\right)_{cpi} \cdot \mathrm{S}_\mathrm{i} = const \tag{3.27}$$

Где M - массовый поток жидкости (расход),

$$\left[\frac{кг}{м^3}\right]\left[\frac{м}{с}\right]\left[м^2\right] = \left[\frac{кг}{с}\right]$$

Соотношение (3.27) представляет собой интегральную форму уравнения неразрывности (сплошности) (3.26) для установившегося потока и является одной из форм закона сохранения массы.

В случае, когда плотность не меняется по сечению, имеем

$$\mathrm{M} = \rho_1\upsilon_1\mathrm{S}_1 = \rho_2\upsilon_2\mathrm{S}_2 = \ldots = \rho_i\upsilon_i\mathrm{S}_\mathrm{i} = const \tag{3.28}$$

где $\upsilon_1 = \upsilon_{cp1}$, $\upsilon_2 = \upsilon_{cp2}$ и т.д.

Для несжимаемой жидкости уравнение (3.28) выражает постоянство объёмного потока через любое сечение

$$\mathrm{Q} = \upsilon_i S_i = const \tag{3.29}$$

Где Q -объёмный поток жидкости (расход), $\left[м/с\right]\left[м^2\right] \equiv \left[м^3/с\right]$

Уравнения (3.28)-(3.29) служат для определения скоростей жидкости и площадей сечений каналов.