

## Рабочая программа дисциплины (модуля) «Аналитическая геометрия», включая оценочные материалы

### 1. Требования к результатам обучения по дисциплине (модулю)

#### 1.1. Перечень компетенций, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Группа компетенций	Категория компетенций	Коды и содержание компетенций
Универсальные	-	-
Общепрофессиональные	-	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности
Профессиональные	-	-

#### 1.2. Компетенции и индикаторы их достижения, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Содержание индикатора компетенции
ОПК-1	ОПК-1.1	Применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

#### 1.3. Результаты обучения по дисциплине (модулю)

**Цель изучения дисциплины (модуля)** – формирование математической культуры студентов, овладение современным аппаратом математики для дальнейшего использования в других областях естественнонаучного знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, подготовка к изучению и применению математических методов в профессиональной деятельности, к самостоятельному изучению тех разделов математики, которые могут потребоваться дополнительно в практической и исследовательской работе; формирование навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности и научной работе.

В результате изучения дисциплины (модуля) обучающийся должен

**знать:**

- основы алгебры матриц; основные понятия теории множеств и общей алгебры; основы алгебры векторов; применение метода координат в описании геометрических объектов; классификацию алгебраических линий и поверхностей;

**уметь:**

- исследовать и решать системы линейных уравнений; использовать метод координат в пространствах малой размерности; применять матричные методы в решении алгебраических задач;

**владеть:**

- навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.

### 2. Объем, структура и содержание дисциплины (модуля)

#### 2.1. Объем дисциплины (модуля)

#### 2.1. Объем дисциплины (модуля)

Виды учебной работы	Формы обучения
	Очная
Общая трудоемкость: зачетные единицы/часы	3/108
Контактная работа:	72
Лекции	36
Лабораторные работы	0
Практические занятия, семинары	36
Промежуточная аттестация: зачет	0

## 2.2. Темы (разделы) дисциплины (модуля) с указанием отведенного на них количества часов по формам образовательной деятельности

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Виды учебной работы (в часах)						СР
		Контактная работа						
		Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа				
		Л	Иные	ПЗ	С	ЛР	Иные	
1.	Элементы общей алгебры	2	0	4	0	0	0	3
2.	Теория определителей	2	0	4	0	0	0	3
3.	Алгебра матриц	2	0	4	0	0	0	3
4.	Системы линейных уравнений	2	0	4	0	0	0	3
5.	Алгебра векторов	2	0	4	0	0	0	3
6.	Метод координат	2	0	4	0	0	0	3
7.	Прямая и плоскость	2	0	4	0	0	0	3
8.	Кривые и поверхности второго порядка	2	0	4	0	0	0	3

#### Примечания:

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, С – семинары, ЛР – лабораторные работы, СР – самостоятельная работа.

## 2.3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) и видам работ

### Содержание лекционного курса

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание лекционного курса
1.	Элементы общей алгебры	Основные алгебраические структуры. Элементы теории множеств, операции и отношения над множествами. Отношения, операции над ними. Функции, отношения эквивалентности, отношения частичного порядка.
2.	Теория определителей	Определители второго и третьего порядка. Определители $n$ -го порядка. Перестановки, инверсии. Транспозиции. Три свойства перестановок. Свойства определителей: определитель транспонированной матрицы, перемена местами строк в определителе, определитель матрицы с одинаковыми строками. Свойства определителей: разложение определителя по строке.
3.	Алгебра матриц	Линейное преобразование, умножение линейных преобразований. Произведение матриц, матричная запись линейного преобразования и системы линейных уравнений. Ассоциативность умножения матриц, транспонирование произведения матриц, умножение на единичную матрицу. Сложение, вычитание матриц, произведение матрицы на число. Законы дистрибутивности, ассоциативность умножения на число, скалярная матрица. Линейная комбинация матриц, многочлен от матрицы. Сложение и умножение многочленов от матриц. Определитель произведения матриц.
4.	Системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений, их типы. Теорема Крамера. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга с помощью элементарных преобразований. Метод Гаусса.
5.	Алгебра векторов	Геометрический вектор, модуль вектора, коллинеарные и компланарные вектора. Свободные, скользящие и связанные вектора. Сумма, разность векторов, произведение вектора на число. Свойства этих операций. Ортогональная проекция точки, вектора на прямую и ось. Угол

		между векторами. Вычисление ортогональной проекции. Ортогональная проекция суммы векторов и произведения вектора на число.
6.	Метод координат	Декартова система координат. Преобразование координат точки при замене системы координат. Поворот системы координат на плоскости. Нахождение координат вектора, длины отрезка, деление отрезка в заданном отношении.
7.	Прямая и плоскость	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Прямая на плоскости и алгебраическая кривая первого порядка. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Параметрическое, векторное, каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.
8.	Кривые и поверхности второго порядка	Эллипс. Гипербола. Парабола. Канонические уравнения. Общее уравнение линий второго порядка. Инварианты уравнений второго порядка.

### Содержание занятий семинарского типа

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Тип	Содержание занятий семинарского типа
1.	Элементы общей алгебры	ПЗ	Группа. Абелева, циклическая группа. Изоморфизм, автоморфизм. Кольцо, делители нуля. Тело, поле. Комплексные числа, действия над ними. Тригонометрическая форма, сопряженные числа. Формула Муавра. Извлечение квадратного корня, корни высших степеней, корни из единицы, первообразные корни.
2.	Теория определителей	ПЗ	Свойства определителей: произведение элементов одной строки на алгебраические дополнения другой строки, умножение строки на число, две пропорциональные строки, разложение определителя в сумму двух, прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.
3.	Алгебра матриц	ПЗ	Обратная, неособенная, взаимная матрица. Условие существования, вычисление обратной матрицы. Обратная матрица для произведения матриц. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
4.	Системы линейных уравнений	ПЗ	Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о числе решений системы линейных уравнений.
5.	Алгебра векторов	ПЗ	Линейная комбинация векторов, линейно независимые вектора. Условия линейной зависимости векторов. Базис, разложение вектора по базису, координаты вектора. Изменение координат при сложении векторов и умножении вектора на число, координаты коллинеарных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис, направляющие косинусы. Скалярное произведение векторов, ортогональные вектора, скалярный квадрат. Свойства скалярного произведения, вычисление скалярного произведения через координаты вектора.
6.	Метод координат	ПЗ	Уравнение множества, геометрический образ уравнения. Многочлен многих переменных, алгебраическая поверхность, алгебраическая кривая, их порядок.

			Способы задания кривой в пространстве.
7.	Прямая и плоскость	ПЗ	Плоскость в пространстве и алгебраическая поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно вектору. Векторное, параметрическое уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.
8.	Кривые и поверхности второго порядка	ПЗ	Поверхность вращения, преобразование сжатия. Канонические уравнения поверхностей. Эллипсоид. Двуполостный и однополостный гиперболоиды. Метод сечений. Эллиптический и гиперболический параболоиды. Конус. Цилиндрические поверхности.

### Содержание самостоятельной работы

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание самостоятельной работы
1.	Элементы общей алгебры	Многочлены одной переменной, операции над ними. Алгоритм деления с остатком. Делимость многочленов, ее свойства. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Метод Горнера. Основная теорема алгебры (без док-ва). Формулы Виета. Комплексные корни уравнения с действительными коэффициентами.
2.	Теория определителей	Определитель Вандермонда. Определитель треугольной матрицы. Теорема Лапласа (без доказательства).
3.	Алгебра матриц	Собственные числа и собственные столбцы матрицы, характеристический многочлен.
4.	Системы линейных уравнений	Однородные системы линейных уравнений. Линейная комбинация решений, фундаментальная система решений. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной системы линейных уравнений.
5.	Алгебра векторов	Векторное произведение векторов, правая тройка векторов. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатах. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл смешанного произведения. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в координатах.
6.	Метод координат	Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.
7.	Прямая и плоскость	Общее уравнение прямой в пространстве. Векторное, параметрическое, каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между плоскостями, между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве (канонические и общие уравнения). Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, между прямыми, между прямой и плоскостью.
8.	Кривые и поверхности второго порядка	Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду.

### 3. Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

По дисциплине (модулю) предусмотрены следующие виды контроля качества освоения:

- текущий контроль успеваемости;
- промежуточная аттестация обучающихся по дисциплине (модулю).

#### 3.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые темы (разделы)	Наименование оценочного средства
1.	Элементы общей алгебры	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная

		работа
2.	Теория определителей	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
3.	Алгебра матриц	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
4.	Системы линейных уравнений	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
5.	Алгебра векторов	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
6.	Метод координат	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
7.	Прямая и плоскость	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа
8.	Кривые и поверхности второго порядка	Устный опрос. Дискуссионные процедуры. Контрольная работа

### **3.1.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в процессе текущего контроля успеваемости**

**Устный опрос. Дискуссионные процедуры (круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты, мини-конференции)**

#### **Тема 1.1 ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Элементы теории множеств, операции и отношения над множествами.
2. Отношения, операции над ними.
3. Функции, отношения эквивалентности, отношения частичного порядка.

#### **Тема 1.2 ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Основные алгебраические структуры. Группа. Кольцо. Поле
2. Комплексные числа, действия над ними.
3. Многочлены одной переменной.
4. Комплексные корни уравнения с действительными коэффициентами.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Поле комплексных чисел.
2. Корни степени  $n$  из единицы.
3. Основная теорема алгебры

#### **Тема 2.1 ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Детерминант в разложении по строке и по правилу Саррюса.
2. Свойства определителей: определитель транспонированной матрицы,
3. Определитель матрицы с одинаковыми строками.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Определители второго и третьего порядка.
2. Определители  $n$ -го порядка. Разложение определителя по строке.
3. Свойства определителей: определитель транспонированной матрицы, перемена местами строк в определителе, определитель матрицы с одинаковыми строками.

#### **Тема 2.2 ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Разрешенные операции над строками определителя.
2. Теорема о фальшивом миноре.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Определитель квазиреугольной матрицы.
2. Теорема Лапласа

#### **Тема 3.1 АЛГЕБРА МАТРИЦ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Понятие матрицы как алгебраического объекта.
2. Сложение, вычитание матриц, произведение матрицы на число.
3. Произведение матриц.
4. Определитель произведения матриц.

*Вопросы для дискуссии*

1. Линейное преобразование, умножение линейных преобразований

### **Тема 3.2 АЛГЕБРА МАТРИЦ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Обратная матрица. Единичная матрица. Ранг матрицы.
2. Линейная комбинация матриц, многочлен от матрицы.
3. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

*Вопросы для дискуссии*

1. Определитель обратной матрицы

### **Тема 4.1 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Системы линейных уравнений, их типы. Теорема Крамера.
2. Метод Гаусса. Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
3. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о числе решений системы линейных уравнений.

*Вопросы для дискуссии*

1. Существование решений системы линейных уравнений.

### **Тема 4.2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Однородные системы линейных уравнений. Линейная комбинация решений, фундаментальная система решений.
2. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной системы линейных уравнений.

*Вопросы для дискуссии*

1. Линейное пространство и линейное многообразие решений линейных уравнений.

### **Тема 5.1 АЛГЕБРА ВЕКТОРОВ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Геометрический вектор, модуль вектора, коллинеарные и компланарные вектора. Сумма, разность векторов, произведение вектора на число. Свойства этих операций.
2. Ортогональная проекция точки, вектора на прямую и ось. Угол между векторами. Вычисление ортогональной проекции. Ортогональная проекция суммы векторов и произведения вектора на число.
3. Линейная комбинация векторов, линейно независимые вектора. Условия линейной зависимости векторов. Базис, разложение вектора по базису, координаты вектора. Изменение координат при сложении векторов и умножении вектора на число, координаты коллинеарных векторов.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Изменение координат при смене базиса

### **Тема 5.2 АЛГЕБРА ВЕКТОРОВ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Скалярное произведение векторов, ортогональные вектора, скалярный квадрат. Свойства скалярного произведения, вычисление скалярного произведения через координаты вектора. Ортогональный и ортонормированный базис
2. Векторное произведение векторов, правая тройка векторов. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатах.
3. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в координатах.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

## **Тема 6. МЕТОД КООРДИНАТ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Аффинная система координат. Декартова система координат. Преобразование координат точки при замене системы координат. Поворот системы координат на плоскости.
2. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.
3. Уравнение множества, геометрический образ уравнения. Алгебраическая кривая, её порядок.

*Вопросы для дискуссии*

1. Способы задания кривой в пространстве.

## **Тема 7. 1 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Прямая на плоскости и алгебраическая кривая первого порядка.
2. Общее уравнение прямой. Различные виды уравнений прямой на плоскости.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

*Вопросы для дискуссии*

1. Взаимное расположение прямых на плоскости.
2. Пучок прямых

## **Тема 7.2 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Плоскость в пространстве и алгебраическая поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости.
2. Общее уравнение прямой в пространстве. Различные виды уравнений прямой.
3. Угол между плоскостями, между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве (канонические и общие уравнения)..
4. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

*Вопросы для дискуссии*

1. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, между прямыми, между прямой и плоскостью.
2. Пучок плоскостей.

## **Тема 8.1 КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Конические сечения. Эллипс. Гипербола. Парабола. Канонические уравнения линий.
2. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Инварианты.

*Вопросы для дискуссии:*

1. Полярные уравнения линии второго порядка.
2. Классификация линий второго порядка.

## **Тема 8.2 КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

*Вопросы для устного опроса:*

1. Поверхность вращения, преобразование сжатия. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Эллипсоид.
2. Двуполостный и однополостный гиперболоиды. Метод сечений.
3. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
4. Конус. Цилиндрические поверхности.

*Вопросы для дискуссии*

1. Свойства поверхностей второго порядка.
2. Классификация поверхностей второго порядка.

## **Контрольный работа**

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4-5 \\ 8 & 7-2 \\ 2-1 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Раскладываем определитель по первому столбцу:

$$\begin{aligned} \text{Det} \mathbf{A} &= 3 \times \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \times [7 \times 8 - (-1) \times (-2)] - 8 \times [4 \times 8 - (-1) \times (-5)] + 2 \times [4 \times (-2) - 7 \times (-5)] = \\ &= 3 \times (56 - 2) - 8 \times (32 - 5) + 2 \times (-8 + 35) = \\ &= 3 \times 54 - 8 \times 27 + 2 \times 27 = 162 - 216 + 54 = 216 - 216 = 0 \\ \text{Det} \mathbf{A} &= 0 \end{aligned}$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Находим определитель матрицы данной системы уравнений.

Выполняя элементарные операции со столбцами определителя, произведем очевидные упрощения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20 \end{aligned}$$

Т.к. определитель отличен от 0, можно воспользоваться методом Крамера.

$$x_i = \Delta_{xi} / \Delta ; i = 1, 2, 3, 4$$

Вычисляем определители  $\Delta_{xi}$  для неизвестных, получающиеся заменой соответствующих столбцов на столбец правой части:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$



$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) = -1 + 2 - 5 + 4 = 0$$

;

$$\Delta_{x4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) = -1 + 2 - 3 + 5 = 3$$

;

используя эти определители, находим:  $x_1 = \Delta_{x1}/\Delta = -2$ ,  $x_2 = \Delta_{x2}/\Delta = 2$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 3$ .

Решение системы уравнений можно записать в виде  $(-2, 2, -3, 3)^t$

3. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

К элементарным преобразованиям строк матрицы относятся

- перестановка строк матрицы;
- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к строке элементов другой строки, умноженной на некоторое число.

Образуем прямоугольную матрицу вида  $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$  размером  $n \times 2n$ , приписав справа к исходной матрице единичную матрицу. Используя элементарные преобразования строк, приведем полученную матрицу к виду  $(\mathbf{E} | \mathbf{B})$ , что всегда возможно для невырожденной матрицы  $\mathbf{A}$ . Поскольку каждое из этих преобразований сводится к умножению матрицы слева на некоторую невырожденную матрицу и умножение матриц ассоциативно, то справа мы получим матрицу, обратную исходной  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

Записываем матрицу  $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$  и выполняем элементарные преобразования строк. Будем обозначать, например, соотношением

$$(2) = (2) - 3(1)$$

преобразование, при котором на место второй строки ставится ее прежнее значение, сложенное с первой строкой, умноженной на -3

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} (1) = (3) \\ (2) = (1) \\ (3) = (2) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} (1) = (1) \\ (2) = (2) - 2(1) \\ (3) = (3) - 3(1) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right\rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} (1) = (1) \\ (2) = -\frac{1}{3}(2) \\ (3) = (3) - 2(2) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} (1) = (1) - 3(2) \\ (2) = (2) - 1(3) \\ (3) = (3) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} (1) = (1) - 2(2) \\ (2) = (2) \\ (3) = (3) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Даны три вектора:  $p = \{3; -2; 1\}$ ,  $q = \{-1; 1; -2\}$ ,  $r = \{2; 1; -3\}$ .

Найти разложение вектора  $c = \{11; -6; 5\}$  по базису  $p, q, r$

Разложение имеет вид:  $c = \alpha p + \beta q + \gamma r$ .

Подставив координаты заданных векторов, получаем:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \gamma$$

Решаем эту систему относительно неизвестных  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta - 2\gamma = -6 \\ \alpha - 2\gamma = 5 \end{cases}$$

Решение системы:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -3$ ,  $\gamma = 1$ .

Ответ:  $c = 2p - 3q + r$ .

5. Даны три некопланарных вектора  $a, b, c$

Вычислить, при каких значениях  $\lambda$  и  $\mu$  векторы  $\lambda a + \mu b + c$ ,  $a + \lambda b + \mu c$  коллинеарны.

Для решения задачи существенны свойства векторов в пространстве, а именно:

- три произвольных некопланарных вектора в трехмерном пространстве образуют базис;
- коэффициенты в разложении вектора по базису суть координаты вектора в данном базисе;
- координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Отсюда  $\frac{\lambda}{1} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ , что дает  $\lambda = \mu = 1$

6. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

Исходная прямая задана пересечением двух плоскостей.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a, b, c)$  в направлении  $(l, m, n)$ , имеет вид

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$$

Для решения задачи следует определить координаты точки, лежащей на прямой, а также координаты направляющего вектора.

Произвольно зафиксируем одну из координат искомой точки на прямой, например,  $z = 0$ .

Подставим это значение в исходную систему, определяющую нашу прямую, и решим ее относительно  $x$  и  $y$ .

Направляющий вектор прямой может быть задан векторным произведением двух нормалей к заданным плоскостям.

При  $z = 0$  получаем пару уравнений:

$$x - 2y = 4$$

$$3x + 2y = 4,$$

из которых найдем, что точка с координатами  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -1$ ,  $z_0 = 0$  лежит на искомой прямой.

Векторное произведение двух нормалей  $n_1(1, -2, 3)$   $n_2(3, 2, -5)$  дает вектор

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4i + 14j - 4k$$

Для упрощения в качестве направляющего возьмем вектор, коллинеарный полученному  $\mathbf{l}_2 = \{2; 7; -2\}$ .

Ответ: каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{-2}$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$2x - y + 3z - 5 = 0$$

$x + 3y - 2z + 5 = 0$  параллельно вектору  $\mathbf{L} = \{2; -1; -2\}$ .

Для решения задачи выпишем уравнение пучка плоскостей:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ либо}$$

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Из множества плоскостей, принадлежащих пучку, используя дополнительное условие, определяем уравнение искомой плоскости.

В нашем случае искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей

$$2x - y + 3z - 5 + \lambda(x + 3y - 2z + 5) = 0$$

и вектор нормали этой плоскости ортогонален вектору  $\mathbf{L} = \{2; -1; -2\}$ .

Преобразуя уравнение пучка, выделим вектор нормали:

$$(2+\lambda)x - (1-3\lambda)y + (3-2\lambda)z - (5-5\lambda) = 0$$

$$\mathbf{n} = \{(2+\lambda); (1-3\lambda); (3-2\lambda)\}$$

и запишем условие ортогональности нормали заданному вектору  $(\mathbf{nL}) = 0$ :

$$2(2+\lambda) + (1-3\lambda) - 2(3-2\lambda) = 0$$

$$4 + 2\lambda + 1 - 3\lambda - 6 + 4\lambda = 0$$

$$3\lambda = 1$$

$$\lambda = 1/3.$$

Подставляя найденное значение параметра  $\lambda$  находим уравнение плоскости:

$$7x/3 + 7z/3 - 10/3 = 0 \text{ или}$$

$$7x + 7z - 10 = 0.$$

8. Даны координаты вершин тетраэдра  $A(4, 2, 5)$ ;  $B(0, 7, 2)$ ;  $C(0, 2, 7)$ ;  $D(1, 5, 0)$

Найти

- $\cos \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между гранями  $AB$  и  $AD$ ;
- Уравнение прямой  $AD$ ;
- Площадь грани  $ABC$ ;
- Объем тетраэдра.

Тетраэдр вполне определен тремя векторами, имеющими начало в точке  $A$  и оканчивающимися в вершинах  $B, C, D$ . Найдем координаты этих векторов:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} Bx - Ax \\ By - Ay \\ Bz - Az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

a. Косинус угла определим из скалярного произведения векторов  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{AD}$ .

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{AD}|} = \frac{12 + 15 + 15}{\sqrt{16 + 25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 9 + 25}} = \frac{42}{5\sqrt{86}}$$

b. Каноническое уравнение прямой, проходящей через вершины  $A$  и  $D$ , выписываем без труда (см. задачу 6):

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-5}$$

; отсюда можно получить параметрические уравнения этой прямой:

$$x = -3t + 4; y = 3t + 2; z = -5t + 5$$

c. Площадь грани  $ABC$  найдем через векторное произведение векторов, образующих соответствующие ребра:

$$S = \left| \begin{vmatrix} 1 & i & j & k \\ -4 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} 10 |i + 2j + 2k| = 5\sqrt{9} = 15$$

d. Объем тетраэдра можно определить через смешанное произведение этих векторов. Величина смешанного произведения равна ориентированному объему параллелепипеда, построенного на трех векторах. Поэтому объем тетраэдра равен

$$V_T = \left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{35}{3}$$

9. При каких значениях  $m$  и  $n$  уравнение  $x^2 + 6xy + my^2 + 3x + ny - 4 = 0$  определяет:

1. Центральную линию;
2. Линию без центра;
3. Линию, имеющую бесконечно много центров.

Для классификации линии второго порядка, заданной общим уравнением, по типу симметрии рассмотрим инварианты уравнения линии:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; I_3 =$$

Выделяют три группы линий, а именно I

I группа, линии имеют единственный центр симметрии, инвариант  $I_2 \neq 0$

II группа, нет центра симметрии, инварианты  $I_2 = 0; I_3 \neq 0$

III группа, центры симметрии образуют прямую линию, инварианты  $I_2 = 0; I_3 = 0$

В данной задаче второй инвариант

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m - 9$$

Линия относится к первой группе, (центральная линия) при  $m \neq 9$  и любом  $n$ .

Линия не будет иметь центра при  $m = 9$  и  $I_3 \neq 0$ .

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3/2 \\ 3 & m & n/2 \\ 3/2 & n/2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3/2 \\ 3 & 9 & n/2 \\ 3/2 & n/2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{(n-9)^2}{4}$$

Т.е. линия относится ко второй группе при  $m = 9$  и  $n \neq 9$ .

Линия будет относиться к третьей группе ( $I_2 = 0; I_3 = 0$ ) при  $m = 9$  и  $n = 9$ .

Такой же результат можно получить, рассматривая существование решений системы уравнений, определяющей координаты центра линии второго порядка:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

В нашем случае имеем

$$x + 3y + 3/2 = 0$$

$$3x + my + n/2 = 0$$

или эквивалентную ей систему

$$2x + 6y + 3 = 0$$

$$6x + 2my + n = 0.$$

Решение системы единственно, или линия имеет единственный центр при

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2m \end{vmatrix} = 4m - 36 \neq 0 \quad m \neq 9$$

При  $m \neq 9$  и любом  $n$  уравнение определяет центральную линию.

При  $m=9$  и  $n=9$  расширенная матрица системы имеет вид:

### **3.1.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости**

#### **Устный ответ**

Оценка знаний предполагает дифференцированный подход к обучающемуся, учет его индивидуальных способностей, степень усвоения и систематизации основных понятий и категорий по дисциплине. Кроме того, оценивается не только глубина знаний поставленных вопросов, но и умение использовать в ответе практический материал. Оценивается культура речи, владение навыками ораторского искусства.

*Критерии оценивания:* последовательность, полнота, логичность изложения, анализ различных точек зрения, самостоятельное обобщение материала, использование профессиональных терминов, культура речи, навыки ораторского искусства. Изложение материала без фактических ошибок.

Оценка «*отлично*» ставится в случае, когда материал излагается исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно, при этом раскрываются не только основные понятия, но и анализируются точки зрения различных авторов. Обучающийся не затрудняется с ответом, соблюдает культуру речи.

Оценка «*хорошо*» ставится, если обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, знает практическую базу, но при ответе на вопрос допускает несущественные погрешности.

Оценка «*удовлетворительно*» ставится, если обучающийся освоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении материала, затрудняется с ответами, показывает отсутствие должной связи между анализом, аргументацией и выводами.

Оценка «*неудовлетворительно*» ставится, если обучающийся не отвечает на поставленные вопросы.

#### **Дискуссионные процедуры**

*Круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты, мини-конференции* являются средствами, позволяющими включить обучающихся в процесс обсуждения спорного вопроса, проблемы и оценить их умение аргументировать собственную точку зрения. Задание дается заранее, определяется круг вопросов для обсуждения, группы участников этого обсуждения.

Дискуссионные процедуры могут быть использованы для того, чтобы студенты:

- лучше поняли усвояемый материал на фоне разнообразных позиций и мнений, не обязательно достигая общего мнения;
- смогли постичь смысл изучаемого материала, который иногда чувствуют интуитивно, но не могут высказать вербально, четко и ясно, или конструировать новый смысл, новую позицию;
- смогли согласовать свою позицию или действия относительно обсуждаемой проблемы.

*Критерии оценивания* – оцениваются действия всех участников группы. Понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Соответствие реальной действительности решений, выработанных в ходе игры. Владение терминологией, демонстрация владения учебным материалом по теме игры, владение методами аргументации, умение работать в группе (умение слушать, конструктивно вести беседу, убеждать, управлять временем, бесконфликтно общаться), достижение игровых

целей, (соответствие роли – при ролевой игре). Ясность и стиль изложения.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда все требования выполнены в полном объеме.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Решения, выработанные в ходе игры, полностью соответствуют реальной действительности. Но некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены нормы общения, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия в целом соответствуют заданным целям. Однако, решения, выработанные в ходе игры, не совсем соответствуют реальной действительности. Некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающиеся не понимают проблему, их высказывания не соответствуют заданным целям.

### **Контрольная работа**

Оценивается не только глубина знаний поставленных вопросов, но и умение изложить письменно.

*Критерии оценивания:* последовательность, полнота, логичность изложения, анализ различных точек зрения, самостоятельное обобщение материала. Изложение материала без фактических ошибок.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда соблюдены все критерии.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, знает практическую базу, но допускает несущественные погрешности.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся освоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении материала, затрудняется с ответами, показывает отсутствие должной связи между анализом, аргументацией и выводами.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не отвечает на поставленные вопросы.

## **3.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации**

### **3.2.1. Критерии оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)**

Шкала оценивания	Результаты обучения	Показатели оценивания результатов обучения
ОТЛИЧНО	Знает:	- обучающийся глубоко и всесторонне усвоил материал, уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - на основе системных научных знаний делает квалифицированные выводы и обобщения, свободно оперирует категориями и понятиями.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, используя научные понятия, ссылаясь на нормативную базу.
	Владеет:	- обучающийся владеет рациональными методами (с использованием рациональных методик) решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал навыки - выделения главного, - связкой теоретических положений с требованиями руководящих документов, - изложения мыслей в логической последовательности, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
ХОРОШО	Знает:	- обучающийся твердо усвоил материал, достаточно грамотно его

		излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений, оперирует категориями и понятиями, но не всегда правильно их верифицирует.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и в основном правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, не в полной мере используя научные понятия и ссылки на нормативную базу.
	Владеет:	- обучающийся в целом владеет рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении смог продемонстрировать достаточность, но не глубинность навыков, - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связи теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	Знает:	- обучающийся ориентируется в материале, однако затрудняется в его изложении; - показывает недостаточность знаний основной и дополнительной литературы; - слабо аргументирует научные положения; - практически не способен сформулировать выводы и обобщения; - частично владеет системой понятий.
	Умеет:	- обучающийся в основном умеет решить учебно-профессиональную задачу или задание, но допускает ошибки, слабо аргументирует свое решение, недостаточно использует научные понятия и руководящие документы.
	Владеет:	- обучающийся владеет некоторыми рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал недостаточность навыков - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связи теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	Знает:	- обучающийся не усвоил значительной части материала; - не может аргументировать научные положения; - не формулирует квалифицированных выводов и обобщений; - не владеет системой понятий.
	Умеет:	обучающийся не показал умение решать учебно-профессиональную задачу или задание.
	Владеет:	не выполнены требования, предъявляемые к навыкам, оцениваемым «удовлетворительно».

### 3.2.2. Контрольные задания и/или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

#### Список вопросов для устных ответов (варианты теста)

1. Декартова система координат. Преобразование координат точки при замене системы координат. Поворот системы координат на плоскости.
2. Нахождение координат вектора, длины отрезка, деление отрезка в заданном отношении.
3. Уравнение множества, геометрический образ уравнения. Многочлен многих переменных, алгебраическая поверхность, алгебраическая кривая, их порядок. Способы задания кривой в пространстве.
4. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

5. Прямая на плоскости и алгебраическая линия первого порядка. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Параметрическое, векторное, каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой.
6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.
7. Плоскость в пространстве и алгебраическая поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно вектору. Векторное, параметрическое уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.
8. Общее уравнение прямой в пространстве. Векторное, параметрическое, каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
9. Угол между плоскостями, между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве (канонические и общие уравнения). Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
10. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, между прямыми, между прямой и плоскостью.
11. Классификация уравнений второго порядка от двух переменных. Инварианты уравнений.
12. Канонические уравнения линий второго порядка. Конические сечения. Эллипс. Гипербола. Парабола.
13. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду.
14. Поверхность вращения, преобразование сжатия.
15. Эллипсоид.
16. Двуполостный и однополостный гиперболоиды.
17. Метод сечений. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
18. Конус.
19. Цилиндрические поверхности.
20. Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Ортонормированный базис.
21. Геометрический вектор, модуль вектора, коллинеарные и компланарные вектора. Свободные, скользящие и связанные вектора. Сумма, разность векторов, произведение вектора на число. Свойства этих операций.
22. Ортогональная проекция точки, вектора на прямую и ось. Угол между векторами. Вычисление ортогональной проекции. Ортогональная проекция суммы векторов и произведения вектора на число.
23. Линейная комбинация векторов, линейно независимые вектора. Условия линейной зависимости векторов. Базис, разложение вектора по базису, координаты вектора. Изменение координат при сложении векторов и умножении вектора на число, координаты коллинеарных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис, направляющие косинусы.
24. Скалярное (внутреннее) произведение векторов, ортогональные вектора, скалярный квадрат. Свойства скалярного произведения, вычисление скалярного произведения через координаты вектора.
25. Векторное (внешнее) произведение векторов, правая тройка векторов. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатах.
26. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл смешанного произведения. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в координатах.



## Тексты проблемно-аналитических и (или) практических учебно-профессиональных задач

Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Раскладываем определитель по первому столбцу:

$$\begin{aligned} \text{Det} \mathbf{A} &= 3 \times \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 8 \times \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \times [7 \times 8 - (-1) \times (-2)] - 8 \times [4 \times 8 - (-1) \times (-5)] + 2 \times [4 \times (-2) - 7 \times (-5)] = \\ &= 3 \times (56 - 2) - 8 \times (32 - 5) + 2 \times (-8 + 35) = \\ &= 3 \times 54 - 8 \times 27 + 2 \times 27 = 162 - 216 + 54 = 216 - 216 = 0 \\ \text{Det} \mathbf{A} &= 0 \end{aligned}$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Находим определитель матрицы данной системы уравнений.

Выполняя элементарные операции со столбцами определителя, произведем очевидные упрощения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20 \end{aligned}$$

Т.к. определитель отличен от 0, можно воспользоваться методом Крамера.

$$x_i = \Delta_{xi} / \Delta ; i = 1, 2, 3, 4$$

Вычисляем определители  $\Delta_{xi}$  для неизвестных, получающиеся заменой соответствующих столбцов на столбец правой части:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

;

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

;

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

;

используя эти определители, находим:  $x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta = -2$ ,  $x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta = 2$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 3$ .

Решение системы уравнений можно записать в виде  $(-2, 2, -3, 3)^t$

3. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

К элементарным преобразованиям строк матрицы относятся

- перестановка строк матрицы;
- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к строке элементов другой строки, умноженной на некоторое число.

Образуем прямоугольную матрицу вида  $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$  размером  $n \times 2n$ , приписав справа к исходной матрице единичную матрицу. Используя элементарные преобразования строк, приведем полученную матрицу к виду  $(\mathbf{E} | \mathbf{B})$ , что всегда возможно для невырожденной матрицы  $\mathbf{A}$ . Поскольку каждое из этих преобразований сводится к умножению матрицы слева на некоторую невырожденную матрицу и умножение матриц ассоциативно, то справа мы получим матрицу, обратную исходной  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

Записываем матрицу  $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$  и выполняем элементарные преобразования строк. Будем обозначать, например, соотношением

$$(2) = (2) - 3(1)$$

преобразование, при котором на место второй строки ставится ее прежнее значение, сложенное с первой строкой, умноженной на -3

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & 100 \\ 3 & 9 & 4 & 010 \\ 1 & 5 & 3 & 001 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 273 & 100 & & \\ 394 & 010 & & \\ 153 & 001 & & \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} (1) = (3) \\ (2) = (1) \\ (3) = (2) \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 153 & 001 & & \\ 273 & 100 & & \\ 394 & 010 & & \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} (1) = (1) \\ (2) = (2) - 2(1) \\ (3) = (3) - 3(1) \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 001 \\ 0 & -3 & -3 & 10-2 \\ 0 & -6 & -5 & 01-3 \end{array}\right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{l} (1) = (1) \\ (2) = -\frac{1}{3}(2) \\ (3) = (3) - 2(2) \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 153 & +001 & & \\ 011 & -\frac{1}{3}0\frac{2}{3} & & \\ 001 & -211 & & \end{array}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} (1) = (1) - 3(2) \\ (2) = (2) - 1(3) \\ (3) = (3) \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 120 & 1 & 0-1 & \\ 010 & \frac{5}{3}-1-\frac{1}{3} & & \\ 001 & -21 & 1 & \end{array}\right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{l} (1) = (1) - 2(2) \\ (2) = (2) \\ (3) = (3) \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & -\frac{7}{3}2-\frac{1}{3} & & \\ 010 & \frac{5}{3}-1-\frac{1}{3} & & \\ 001 & -21 & 1 & \end{array}\right) \\
&A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Даны три вектора:  $\mathbf{p} = \{3; -2; 1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{-1; 1; -2\}$ ,  $\mathbf{r} = \{2; 1; -3\}$ .

Найти разложение вектора  $\mathbf{c} = \{11; -6; 5\}$  по базису  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$

Разложение имеет вид:  $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r}$ .

Подставив координаты заданных векторов, получаем:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему относительно неизвестных  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta - 2\gamma = -6 \\ \alpha - \gamma = 5 \end{cases}$$

Решение системы:  $\alpha=2, \beta=-3, \gamma=1$ .

Ответ:  $\mathbf{c} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$ .

5. Даны три некопланарных вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

Вычислить, при каких значениях  $\lambda$  и  $\mu$  векторы  $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$  коллинеарны.

Для решения задачи существенны свойства векторов в пространстве, а именно:

- три произвольных некопланарных вектора в трехмерном пространстве образуют базис;
- коэффициенты в разложении вектора по базису суть координаты вектора в данном базисе;
- координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Отсюда  $\frac{\lambda}{1} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ , что дает  $\lambda=\mu=1$

6. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

Исходная прямая задана пересечением двух плоскостей.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M(a, b, c)$  в направлении  $(l, m, n)$ , имеет вид

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

Для решения задачи следует определить координаты точки, лежащей на прямой, а также координаты направляющего вектора.

Произвольно зафиксируем одну из координат искомой точки на прямой, например,  $z=0$ . Подставим это значение в исходную систему, определяющую нашу прямую, и решим ее относительно  $x$  и  $y$ .

Направляющий вектор прямой может быть задан векторным произведением двух нормалей к заданным плоскостям.

При  $z=0$  получаем пару уравнений:

$$x-2y=4$$

$$3x+2y=4,$$

из которых найдем, что точка с координатами  $x_0=2, y_0=-1, z_0=0$  лежит на искомой прямой.

Векторное произведение двух нормалей  $n_1(1, -2, 3)$   $n_2(3, 2, -5)$  дает вектор

$$I_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4i + 14j - 4k$$

Для упрощения в качестве направляющего возьмем вектор, коллинеарный полученному  $I_2 = \{2; 7; -2\}$ .

Ответ: каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{-2}$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$2x-y+3z-5=0$$

$$x+3y-2z+5=0 \text{ параллельно вектору } L = \{2; -1; -2\}.$$

Для решения задачи выпишем уравнение пучка плоскостей:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ либо}$$

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Из множества плоскостей, принадлежащих пучку, используя дополнительное условие, определяем уравнение искомой плоскости.

В нашем случае искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей

$$2x-y+3z-5+\lambda(x+3y-2z+5) = 0$$

и вектор нормали этой плоскости ортогонален вектору  $L = \{2; -1; -2\}$ .

Преобразуя уравнение пучка, выделим вектор нормали:

$$(2+\lambda)x - (1-3\lambda)y + (3-2\lambda)z - (5-5\lambda) = 0$$

$$n = \{(2+\lambda); (1-3\lambda); (3-2\lambda)\}$$

и запишем условие ортогональности нормали заданному вектору  $(nL) = 0$ :

$$2(2+\lambda) + (1-3\lambda) - 2(3-2\lambda) = 0$$

$$4+2\lambda+1-3\lambda-6+4\lambda=0$$

$$3\lambda=1$$

$$\lambda=1/3.$$

Подставляя найденное значение параметра  $\lambda$  находим уравнение плоскости:

$$7x/3 + 7z/3 - 10/3 = 0 \text{ или}$$

$$7x+7z-10=0.$$

8. Даны координаты вершин тетраэдра  $A(4, 2, 5); B(0, 7, 2); C(0, 2, 7); D(1, 5, 0)$

Найти

- $\cos \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между гранями  $AB$  и  $AD$ ;
- Уравнение прямой  $AD$ ;
- Площадь грани  $ABC$ ;
- Объем тетраэдра.

Тетраэдр вполне определен тремя векторами, имеющими начало в точке  $A$  и оканчивающимися в вершинах  $B, C, D$ . Найдем координаты этих векторов:

$$AB = \begin{pmatrix} Bx - Ax \\ By - Ay \\ Bz - Az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; AC = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; AD = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

б. Косинус угла определим из скалярного произведения векторов AB и AD.

$$\cos \varphi = \frac{(AB \cdot AD)}{|AB| \cdot |AD|} = \frac{12 + 15 + 15}{\sqrt{16 + 25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 9 + 25}} = \frac{42}{5\sqrt{86}}$$

б. Каноническое уравнение прямой, проходящей через вершины A и D, выписываем без труда (см. задачу 6):

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-5}$$

; отсюда можно получить параметрические уравнения этой прямой:

$$x = -3t + 4; y = 3t + 2; z = -5t + 5$$

с. Площадь грани ABC найдем через векторное произведение векторов, образующих соответствующие ребра:

$$S = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} 10 |i + 2j + 2k| = 5\sqrt{9} = 15$$

д. Объем тетраэдра можно определить через смешанное произведение этих векторов. Величина смешанного произведения равна ориентированному объему параллелепипеда, построенного на трех векторах. Поэтому объем тетраэдра равен

$$V_T = \left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{35}{3}$$

9. При каких значениях m и n уравнение  $x^2 + 6xy + my^2 + 3x + ny - 4 = 0$  определяет:

1. Центральную линию;
2. Линию без центра;
3. Линию, имеющую бесконечно много центров.

Для классификации линии второго порядка, заданной общим уравнением, по типу симметрии рассмотрим инварианты уравнения линии:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; I_3 =$$

Выделяют три группы линий, а именно I

I группа, линии имеют единственный центр симметрии, инвариант  $I_2 \neq 0$

II группа, нет центра симметрии, инварианты  $I_2 = 0; I_3 \neq 0$

III группа, центры симметрии образуют прямую линию, инварианты  $I_2 = 0; I_3 = 0$

В данной задаче второй инвариант

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m - 9$$

Линия относится к первой группе, (центральная линия) при  $m \neq 9$  и любом n.

Линия не будет иметь центра при  $m = 9$  и  $I_3 \neq 0$ .

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3/2 \\ 3 & m & n/2 \\ 3/2 & n/2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3/2 \\ 3 & 9 & n/2 \\ 3/2 & n/2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{(n-9)^2}{4}$$

Т.е. линия относится ко второй группе при  $m = 9$  и  $n \neq 9$ .

Линия будет относиться к третьей группе ( $I_2=0$ ;  $I_3 = 0$ ) при  $m = 9$  и  $n = 9$ .

Такой же результат можно получить, рассматривая существование решений системы уравнений, определяющей координаты центра линии второго порядка:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

В нашем случае имеем

$$x + 3y + 3/2 = 0$$

$$3x + my + n/2 = 0$$

или эквивалентную ей систему

$$2x + 6y + 3 = 0$$

$$6x + 2my + n = 0.$$

Решение системы единственно, или линия имеет единственный центр при

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2m \end{vmatrix} = 4m - 36 \neq 0 \quad m \neq 9$$

При  $m \neq 9$  и любом  $n$  уравнение определяет центральную линию.

При  $m=9$  и  $n=9$  расширенная матрица системы имеет вид:

### 3.2.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков в ходе промежуточной аттестации

#### Процедура оценивания знаний (устный ответ)

Предел длительности	10 минут
Предлагаемое количество заданий	2 вопроса
Последовательность выборки вопросов из каждого раздела	Случайная
Критерии оценки	<ul style="list-style-type: none"> <li>- требуемый объем и структура</li> <li>- изложение материала без фактических ошибок</li> <li>- логика изложения</li> <li>- использование соответствующей терминологии</li> <li>- стиль речи и культура речи</li> <li>- подбор примеров из научной литературы и практики</li> </ul>
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов
«3» если	требования выполнены частично – не выдержан объем, есть фактические ошибки, нарушена логика изложения, недостаточно используется соответствующая терминология

#### Процедура оценивания умений и навыков (решение проблемно-аналитических и практических учебно-профессиональных задач)

Предлагаемое количество заданий	1
Последовательность выборки	Случайная
Критерии оценки:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- выделение и понимание проблемы</li> <li>- умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения</li> <li>- полнота использования источников</li> <li>- наличие авторской позиции</li> <li>- соответствие ответа поставленному вопросу</li> <li>- использование социального опыта, материалов СМИ, статистических данных</li> <li>- логичность изложения</li> <li>- умение сделать квалифицированные выводы и обобщения с точки зрения решения профессиональных задач</li> </ul>

	- умение привести пример - опора на теоретические положения - владение соответствующей терминологией
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов. Затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений
«3» если	требования выполнены частично – пытается обосновать свою точку зрения, однако слабо аргументирует научные положения, практически не способен самостоятельно сформулировать выводы и обобщения, не видит связь с профессиональной деятельностью

#### 4. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

##### 4.1. Электронные учебные издания

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. — 5-е изд. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. — 183 с. — ISBN 978-5-7782-3868-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Куликова, Н. А. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисления. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / Н. А. Куликова, О. В. Фадеева. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2019. — 86 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/105212.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Окунева, Г. Л. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учебное пособие / Г. Л. Окунева, Л. Б. Польшина, Н. В. Овчарова. — Белгород : Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, ЭБС АСВ, 2020. — 88 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/110191.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. — 4-е изд. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 208 с. — ISBN 978-5-4344-0720-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/91909.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Рихтер, Т. В. Алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / Т. В. Рихтер. — Соликамск : Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», 2020. — 127 с. — ISBN 978-5-91252-078-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/104338.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

##### 4.2. Электронные образовательные ресурсы

1. Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт») [Электронный ресурс]. — URL: <https://urait.ru/>.
2. Электронно-библиотечная система ZNANIUM [Электронный ресурс]. — URL: <https://znanium.com/>.

3. Электронная библиотечная система «Консультант студента» [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.studentlibrary.ru/>.
4. e-Library.ru: Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – URL: <http://elibrary.ru/>.
5. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» [Электронный ресурс]. – URL: <http://cyberleninka.ru/>.
6. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» [Электронный ресурс]. – URL: <http://window.edu.ru/>.
7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. – URL: <http://fcior.edu.ru/>.

#### **4.3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Обучающимся обеспечен доступ (удаленный доступ) к ниже следующим современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам:

1. Словари и энциклопедии на Академике [Электронный ресурс]. – URL: <http://dic.academic.ru>.
2. Система информационно-правового обеспечения «Гарант» [Электронный ресурс]. – URL: <http://ivo.garant.ru/>.

#### **4.4. Комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства**

1. Лицензионное программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных приложений Microsoft Office.
2. Свободно распространяемое программное обеспечение: свободные пакеты офисных приложений Apache Open Office, LibreOffice.
3. Программное обеспечение отечественного производства: справочно-правовая система «Гарант» (Электронный периодический справочник «Система ГАРАНТ»), образовательная платформа ЮРАЙТ (Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт»)), электронно-библиотечная система ZNANIUM, электронная библиотечная система «Консультант студента».

#### **4.5. Оборудование и технические средства обучения**

Для реализации дисциплины (модуля) используются учебные аудитории для проведения учебных занятий, которые оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, и помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева. Допускается замена оборудования его виртуальными аналогами.

Наименование учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы*	Оснащенность учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы оборудованием и техническими средствами обучения
Учебные аудитории для проведения учебных занятий	Учебная аудитория укомплектована специализированной мебелью, отвечающей всем установленным нормам и требованиям, оборудованием и техническими средствами обучения (мобильное мультимедийное оборудование).
Помещение для самостоятельной работы	Помещение оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева и к ЭБС.

\* Номер конкретной аудитории указан в приказе об аудиторном фонде, расписании учебных занятий и расписании промежуточной аттестации.