

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра», включая оценочные материалы

1. Требования к результатам обучения по дисциплине (модулю)

1.1. Перечень компетенций, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Группа компетенций	Категория компетенций	Коды и содержание компетенций
Универсальные	-	-
Общепрофессиональные	-	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности
Профессиональные	-	-

1.2. Компетенции и индикаторы их достижения, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Содержание индикатора компетенции
ОПК-1	ОПК-1.1	Применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

1.3. Результаты обучения по дисциплине (модулю)

Цель изучения дисциплины (модуля) – формирование математической культуры студентов, овладение современным аппаратом математики для дальнейшего использования в других областях естественнонаучного знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, подготовка к изучению и применению математических методов в профессиональной деятельности, к самостоятельному изучению тех разделов математики, которые могут потребоваться дополнительно в практической и исследовательской работе; формирование навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности и научной работе.

В результате изучения дисциплины (модуля) обучающийся должен

знать:

- основы алгебры матриц; основные понятия теории множеств и общей алгебры; основы алгебры векторов; применение метода координат в описании геометрических объектов; классификацию алгебраических линий и поверхностей;

уметь:

- исследовать и решать системы линейных уравнений; использовать метод координат в пространствах малой размерности; применять матричные методы в решении алгебраических задач;
- применять методы линейной алгебры в решении профессиональных задач;

владеть:

- терминологией линейной алгебры в решении профессиональных задач;
- навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.

2. Объем, структура и содержание дисциплины (модуля)

2.1. Объем дисциплины (модуля)

Виды учебной работы	Формы обучения
	Очная
Общая трудоемкость: зачетные единицы/часы	4/144
Контактная работа:	72
Лекции	36
Лабораторные работы	0
Практические занятия, семинары	36

Промежуточная аттестация: экзамен	36
Самостоятельная работа (СР)	36

2.2. Темы (разделы) дисциплины (модуля) с указанием отведенного на них количества часов по формам образовательной деятельности

Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Виды учебной работы (в часах)						
		Контактная работа						СР
		Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа				
		Л	Иные	ПЗ	С	ЛР	Иные	
1.	Линейные пространства	4	0	4	0	0	0	8
2.	Евклидовы пространства	4	0	4	0	0	0	8
3.	Линейные операторы	4	0	4	0	0	0	8
4.	Линейные формы	2	0	2	0	0	0	8
5.	Билинейные и квадратичные формы	2	0	2	0	0	0	8

Примечания:

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, С – семинары, ЛР – лабораторные работы, СР – самостоятельная работа.

2.3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) и видам работ

Содержание лекционного курса

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание лекционного курса
1.	Линейные пространства	Линейное (векторное) пространство, его свойства. Аксиомы Вейля. Линейная независимость векторов, ее свойства. Базис.
2.	Евклидовы пространства	Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения, неравенство Коши-Буняковского. Норма, нормированное пространство. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма. Угол между векторами.
3.	Линейные операторы	Линейный оператор (линейное отображение). Ядро и образ оператора. Дефект и ранг оператора, их взаимосвязь. Матрица линейного оператора, вычисления в координатах. Ранг матрицы линейного оператора. Изменение матрицы оператора при замене базиса. Подобные матрицы. Произведение линейных операторов, обратный оператор. Линейное пространство линейных операторов, его изоморфизм пространству матриц.
4.	Линейные формы	Определение линейной функции над векторным пространством. Сопряженное пространство. Линейные формы в евклидовых пространствах.
5.	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании.

Содержание занятий семинарского типа

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Тип	Содержание занятий семинарского типа
1.	Линейные пространства	ПЗ	Координаты вектора, действия над ними. Размерность линейного пространства и базис. Матрица перехода при замене базиса, ее свойства. Изоморфизм линейных пространств.
2.	Евклидовы пространства	ПЗ	Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Матрица Грама. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение.
3.	Линейные операторы	ПЗ	Характеристический многочлен и характеристическое

			уравнение линейного оператора. Собственные вектора и собственные числа линейного оператора, их связь с характеристическим многочленом. Линейное подпространство собственных векторов, инвариантное подпространство. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Операторы простой структуры. Матрица линейного оператора: в базисе из собственных векторов, в случае прямой суммы инвариантных подпространств. Инвариантное подпространство пары комплексно сопряженных корней. Матрица оператора в случае различных комплексных и действительных корней. Жорданова нормальная форма.
4.	Линейные формы	ПЗ	Определение линейной функции над векторным пространством. Сопряженное пространство. Линейные формы в евклидовых пространствах.
5.	Билинейные и квадратичные формы	ПЗ	Нормированные и ортогональные столбцы, ортогональная матрица. Условия ортогональности матрицы. Свойства ортогональных матриц. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Содержание самостоятельной работы

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание самостоятельной работы
1.	Линейные пространства	Линейное подпространство. Линейная оболочка векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Размерность суммы подпространств. Прямое дополнение.
2.	Евклидовы пространства	Разложение произвольного вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую. Унитарные пространства.
3.	Линейные операторы	Сопряженный оператор, его матрица. Самосопряженный оператор, его матрица. Собственные числа и собственные векторы самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в случае различных корней. Ортогональное дополнение инвариантного подпространства, размерность подпространства собственных векторов. Матрица самосопряженного оператора в случае кратных корней. Ортогональный оператор, его свойства. Ортогональный оператор и ортонормированные базисы. Матрица ортогонального оператора. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
4.	Линейные формы	Определение линейной функции над векторным пространством. Сопряженное пространство. Линейные формы в евклидовых пространствах.
5.	Билинейные и квадратичные формы	Теорема Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.

3. Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

По дисциплине (модулю) предусмотрены следующие виды контроля качества освоения:

- текущий контроль успеваемости;
- промежуточная аттестация обучающихся по дисциплине (модулю).

3.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые темы (разделы)	Наименование оценочного средства
1.	Линейные пространства	Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными

		условиями). Дискуссионные процедуры
2.	Евклидовы пространства	Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями). Дискуссионные процедуры
3.	Линейные операторы	Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями). Дискуссионные процедуры
4.	Линейные формы	Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями). Дискуссионные процедуры
5.	Билинейные и квадратичные формы	Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями). Дискуссионные процедуры

3.1.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в процессе текущего контроля успеваемости

Устный опрос. Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями). Дискуссионные процедуры (круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты, мини-конференции)

Тема 1.1 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Первая группа аксиом Вейля.
2. Линейная зависимость векторов.
3. Вторая группа аксиом Вейля.

Вопросы для дискуссии:

1. Примеры векторных пространств.
2. Размерность линейного пространства и базис.

Тема 1.2 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Матрица перехода при замене базиса, ее свойства.
2. Изоморфизм линейных пространств.

Тема 1.3 ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Линейное подпространство. Линейная оболочка векторов.
2. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств.
3. Размерность суммы подпространств.

Вопросы для дискуссии:

1. Прямое дополнение подпространства

Тема 2.1. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Третья группа аксиом Вейля.
2. Свойства скалярного произведения, неравенство Коши-Буняковского.

Вопросы для дискуссии:

1. Угол между векторами.
2. Матрица Грама.

Тема 2.2. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Норма, нормированное пространство. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма. Угол между векторами.
2. Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Матрица Грама.
3. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение.
4. Норма, нормированное пространство.
5. Ортогональная система векторов, ее линейная независимость.

Вопросы для дискуссии:

1. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма.

Тема 2.3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для устного опроса:

1. Разложение произвольного вектора на ортогональную проекцию и ортогональную

составляющую.

2. Унитарные пространства.

Тема 3.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Линейный оператор (линейное отображение).

2. Ядро и образ оператора. Дефект и ранг оператора, их взаимосвязь.

Вопросы для дискуссии:

1. Существование обратного оператора

Тема 3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Цель: освоить аппарат алгебры матриц в представлении линейных операторов

Вопросы для устного опроса:

1. Матрица линейного оператора, вычисления в координатах.

2. Ранг матрицы линейного оператора.

3. Изменение матрицы оператора при замене базиса.

Вопросы для дискуссии:

1. Подобные матрицы.

Тема 3.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Произведение линейных операторов, обратный оператор. Линейное пространство линейных операторов, его изоморфизм пространству матриц.

2. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора. Собственные вектора и собственные числа линейного оператора, их связь с характеристическим многочленом.

Тема 3.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Линейное подпространство собственных векторов, инвариантное подпространство. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Операторы простой структуры.

2. Матрица линейного оператора: в базисе из собственных векторов, в случае прямой суммы инвариантных подпространств.

Вопросы для дискуссии:

1, Инвариантное подпространство пары комплексно сопряженных корней.

Тема 3.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Матрица оператора в случае различных комплексных и действительных корней.

2. Жорданова нормальная форма.

Вопросы для дискуссии:

1. Жорданова нормальная форма.

Тема 3.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Сопряженный оператор, его матрица. Самосопряженный оператор, его матрица.

2. Собственные числа и собственные векторы самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в случае различных корней.

3. Ортогональное дополнение инвариантного подпространства, размерность подпространства собственных векторов.

4. Матрица ортогонального оператора.

Вопросы для дискуссии:

1. Матрица самосопряженного оператора в случае кратных корней.

2. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Тема 4.1. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Определение линейной функции над векторным пространством. Сопряженное пространство.
2. Линейные формы в евклидовых пространствах.

Тема 5.1. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Вопросы для устного опроса:

1. Билинейные формы. Матрица билинейной формы.
2. Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы.
3. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании
4. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Вопросы для дискуссии:

1. Канонический вид квадратичной формы.

Тема 5.2. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Цель: Изучить инварианты квадратичных форм.

Вопросы для устного опроса:

1. Теорема Лагранжа.
2. Закон инерции квадратичных форм.
3. Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.

3.1.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости

Устный ответ

Оценка знаний предполагает дифференцированный подход к обучающемуся, учет его индивидуальных способностей, степень усвоения и систематизации основных понятий и категорий по дисциплине. Кроме того, оценивается не только глубина знаний поставленных вопросов, но и умение использовать в ответе практический материал. Оценивается культура речи, владение навыками ораторского искусства.

Критерии оценивания: последовательность, полнота, логичность изложения, анализ различных точек зрения, самостоятельное обобщение материала, использование профессиональных терминов, культура речи, навыки ораторского искусства. Изложение материала без фактических ошибок.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда материал излагается исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно, при этом раскрываются не только основные понятия, но и анализируются точки зрения различных авторов. Обучающийся не затрудняется с ответом, соблюдает культуру речи.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, знает практическую базу, но при ответе на вопрос допускает несущественные погрешности.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся освоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении материала, затрудняется с ответами, показывает отсутствие должной связи между анализом, аргументацией и выводами.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не отвечает на поставленные вопросы.

Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями)

Обучающийся должен уметь выделить основные положения из текста задачи, которые требуют анализа и служат условиями решения. Исходя из поставленного вопроса в задаче, попытаться максимально точно определить проблему и соответственно решить ее.

Задачи могут решаться устно и/или письменно. При решении задач также важно

правильно сформулировать и записать вопросы, начиная с более общих и, кончая частными.

Критерии оценивания – оценка учитывает методы и средства, использованные при решении ситуационной, проблемной задачи.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда обучающийся выполнил задание (решил задачу), используя в полном объеме теоретические знания и практические навыки, полученные в процессе обучения.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся в целом выполнил все требования, но не совсем четко определяется опора на теоретические положения, изложенные в научной литературе по данному вопросу.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся показал положительные результаты в процессе решения задачи.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не выполнил все требования.

Дискуссионные процедуры

Круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты, мини-конференции являются средствами, позволяющими включить обучающихся в процесс обсуждения спорного вопроса, проблемы и оценить их умение аргументировать собственную точку зрения. Задание дается заранее, определяется круг вопросов для обсуждения, группы участников этого обсуждения.

Дискуссионные процедуры могут быть использованы для того, чтобы студенты:

– лучше поняли усвояемый материал на фоне разнообразных позиций и мнений, не обязательно достигая общего мнения;

– смогли постичь смысл изучаемого материала, который иногда чувствуют интуитивно, но не могут высказать вербально, четко и ясно, или конструировать новый смысл, новую позицию;

– смогли согласовать свою позицию или действия относительно обсуждаемой проблемы.

Критерии оценивания – оцениваются действия всех участников группы. Понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Соответствие реальной действительности решений, выработанных в ходе игры. Владение терминологией, демонстрация владения учебным материалом по теме игры, владение методами аргументации, умение работать в группе (умение слушать, конструктивно вести беседу, убеждать, управлять временем, бесконфликтно общаться), достижение игровых целей, (соответствие роли – при ролевой игре). Ясность и стиль изложения.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда все требования выполнены в полном объеме.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Решения, выработанные в ходе игры, полностью соответствуют реальной действительности. Но некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены нормы общения, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия в целом соответствуют заданным целям. Однако, решения, выработанные в ходе игры, не совсем соответствуют реальной действительности. Некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающиеся не понимают проблему, их высказывания не соответствуют заданным целям.

3.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

3.2.1. Критерии оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Шкала оценивания	Результаты обучения	Показатели оценивания результатов обучения
------------------	---------------------	--

ОТЛИЧНО	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся глубоко и всесторонне усвоил материал, уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - на основе системных научных знаний делает квалифицированные выводы и обобщения, свободно оперирует категориями и понятиями.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, используя научные понятия, ссылаясь на нормативную базу.
	Владеет:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся владеет рациональными методами (с использованием рациональных методик) решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал навыки - выделения главного, - связкой теоретических положений с требованиями руководящих документов, - изложения мыслей в логической последовательности, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
ХОРОШО	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся твердо усвоил материал, достаточно грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы, - затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений, оперирует категориями и понятиями, но не всегда правильно их верифицирует.
	Умеет:	- обучающийся умеет самостоятельно и в основном правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, не в полной мере используя научные понятия и ссылки на нормативную базу.
	Владеет:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся в целом владеет рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении смог продемонстрировать достаточность, но не глубинность навыков, - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связки теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся ориентируется в материале, однако затрудняется в его изложении; - показывает недостаточность знаний основной и дополнительной литературы; - слабо аргументирует научные положения; - практически не способен сформулировать выводы и обобщения; - частично владеет системой понятий.
	Умеет:	- обучающийся в основном умеет решить учебно-профессиональную задачу или задание, но допускает ошибки, слабо аргументирует свое решение, недостаточно использует научные понятия и руководящие документы.
	Владеет:	<ul style="list-style-type: none"> - обучающийся владеет некоторыми рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал недостаточность навыков - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связки теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
НЕУДОВЛЕТВО-	Знает:	- обучающийся не усвоил значительной части материала;

РИТЕЛЬНО		- не может аргументировать научные положения; - не формулирует квалифицированных выводов и обобщений; - не владеет системой понятий.
	Умеет:	обучающийся не показал умение решать учебно-профессиональную задачу или задание.
	Владеет:	не выполнены требования, предъявляемые к навыкам, оцениваемым «удовлетворительно».

3.2.2. Контрольные задания и/или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов для устных ответов (варианты теста)

1. Линейное пространство, аксиомы Вейля. Примеры линейных пространств.
2. Линейная зависимость и независимость векторов, ее свойства. Базис. Примеры базисов в различных пространствах.
3. Размерность линейного пространства. Матрица перехода при замене базиса, ее свойства.
4. Линейное подпространство. Линейная оболочка векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Размерность суммы подпространств. Прямое дополнение.
5. Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения, неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами.
6. Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Матрица Грама.
7. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение.
8. Норма, нормированное пространство. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма.
9. Линейный оператор. Ядро и образ оператора. Дефект и ранг оператора, их взаимосвязь.
10. Изоморфизм линейных пространств.
11. Матрица линейного оператора, вычисления в координатах. Ранг матрицы линейного оператора. Изменение матрицы оператора при замене базиса. Подобные матрицы.
12. Произведение линейных операторов, обратный оператор. Линейное пространство линейных операторов, его изоморфизм множеству квадратных матриц.
13. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора.
14. Собственные вектора и собственные числа линейного оператора, их связь с характеристическим многочленом. Теорема Гамильтона-Кэли.
15. Линейное подпространство собственных векторов, инвариантное подпространство.
16. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов.
17. Операторы простой структуры.
18. Жорданова форма матрицы оператора.
19. Сопряженный оператор, его матрица. Самосопряженный оператор, его матрица. 20. Собственные числа и собственные вектора самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в случае различных корней. Ортогональное дополнение инвариантного подпространства, размерность подпространства собственных векторов.
20. Матрица самосопряженного оператора в случае кратных корней.
21. Ортогональный оператор, его свойства. Ортогональный оператор и ортонормированные базисы. Матрица ортогонального оператора. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

22. Линейные формы (функционалы). Представление линейных форм в евклидовом пространстве. Билинейные формы. Матрица билинейной формы.
23. Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании.
24. Диагональная квадратичная форма. Теорема Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм.
25. Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.
26. Нормированные и ортогональные столбцы, ортогональная матрица. Условия ортогональности матрицы. Свойства ортогональных матриц. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Тексты проблемно-аналитических и (или) практических учебно-профессиональных задач

1. При каком λ элементы линейного пространства \mathbf{R}^3
 $x_1 = (3, -2, 5)$, $x_2 = (-4, 2, 1)$, $x_3 = (2, -4, \lambda)$ будут линейно зависимыми?
2. Линейное пространство образовано матрицами, имеющими 2 строки и 3 столбца. Сложение и умножение на число задаются обычным для матриц способом. Чему равна размерность пространства?
3. Найти размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$
4. При каком α отображение $A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданное формулой
 $A(x_1, x_2) = (2x_1 + \alpha, 3x_1 + 2x_2)$, будет линейным оператором?
5. Линейный оператор Φ задан в базисе e_1, e_2 матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
 Найти образ вектора $e_1 + 2e_2$, в ответе указать сумму его координат.
6. Линейный оператор $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$,
 Вектор $(\beta, 1)$ – собственный вектор для Φ , относящийся к собственному значению $\lambda=2$.
 Найти β .
7. Найти положительный индекс инерции квадратично формы
 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
8. Найти матрицу квадратичной формы, получаемой из
 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
 линейной заменой переменных $x_1 = 3y_1 + y_2$, $x_2 = 2y_1 - y_2$. В ответе указать элемент, стоящий в правом верхнем углу матрицы.

Линейные пространства

1. Доказать, что каждая из двух систем векторов (e) и (e') является базисом, найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах.

$$e: \begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 2, 1), \\ \vec{e}_2 &= (2, 3, 3), \\ \vec{e}_3 &= (3, 7, 1), \end{aligned} \quad e': \begin{aligned} \vec{e}'_1 &= (3, 1, 4), \\ \vec{e}'_2 &= (5, 2, 1), \\ \vec{e}'_3 &= (1, 1, -6). \end{aligned}$$

Решение

Чтобы проверить, что каждая из систем векторов образует базис, надо найти их ранги. Для пространства V^3 ранг каждой из систем векторов должны равняться 3.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rang(e) = 3, \Delta(e) = 1$$

$$e' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$rang(e') = 3, \Delta(e') = 4$$

Пусть вектор \vec{x} в базисе e имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , а в базисе e' — координаты (x'_1, x'_2, x'_3) .

Тогда связь задается формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу T перехода от базиса e к e' .

Согласно равенству $e' = eT$ имеем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} T,$$

для решения которого построим матрицу

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее имеем:

$$T = e^{-1} e' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -27x'_1 - 71x'_2 - 41x'_3,$$

$$x_2 = 9x'_1 + 20x'_2 + 9x'_3,$$

$$x_3 = 4x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3.$$

2. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств

$L_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$, если :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, -2)^T$$

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= (2, 3, 1, 0)^T & \mathbf{b}_2 &= (1, 0, 1, -1)^T \\ \mathbf{a}_3 &= (1, 2, 2, -3)^T & \mathbf{b}_3 &= (1, 3, 0, -4)^T \end{aligned}$$

Евклидовы пространства

3. В евклидовом пространстве R^5 найти угол между векторами

$$\mathbf{a} = (3, -5, 1, 5, -2) \text{ и } \mathbf{b} = (4, 0, -4, 4, 1).$$

4. В евклидовом пространстве найти косинус угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , если $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 4$ и $\|\mathbf{a} - 3\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 9\|\mathbf{b}\|^2 - 6\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

5. Доказать, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Линейные операторы

6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$|A - \lambda E| = -\lambda(4-\lambda)(-\lambda) - 1(-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

Корень уравнения $\lambda = 2$ имеет кратность 3 и является собственным значением линейного оператора.

Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению

$\lambda = 2$ найдем из однородной СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = 0$ при $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, приходим к уравнению $-2x_1 + x_2 = 0$.

Ранг матрицы системы $r=1$, выбираем базисной неизвестной x_2 , x_1 и x_3 будут свободными неизвестными. Решение СЛАУ может быть записано в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $X = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$

Векторы $e_1 = (1, 2, 0)$ и $e_2 = (0, 0, 1)$ порождают собственное подпространство оператора. Любой ненулевой вектор этого подпространства является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\lambda = 2$

7. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств

$L_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$, если :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 2, 1)^T & \mathbf{b}_1 &= (2, 3, -1)^T \\ \mathbf{a}_2 &= (1, 1, -1)^T & \mathbf{b}_2 &= (1, 2, 2)^T \\ \mathbf{a}_3 &= (1, 3, 3)^T & \mathbf{b}_3 &= (1, 1, -3)^T \end{aligned}$$

8. Разложить вектор \mathbf{X} на сумму двух векторов, один из которых лежит в подпространстве, натянутом на векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, а другой ортогонален к этому подпространству.

$$\mathbf{X} = (-3, 5, 9, 3)^T$$

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{a}_3 = (2, -7, -1, -1)^T$$

9. Найти собственные значения и собственные вектора матриц:

$$\begin{matrix} \text{а)} & \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \text{б)} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} & \text{в)} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix} & \text{г)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

10. Для заданной матрицы линейного оператора найти базис из собственных векторов и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A=

11. Линейный оператор φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3 . Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в котором заданы координатами все векторы:

$$a_1 = (1, 2, -3)^T$$

$$a_2 = (0, 1, 2)^T$$

$$a_3 = (1, 0, 4)^T$$

$$b_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$b_2 = (1, 2, 1)^T$$

$$b_3 = (0, 1, 1)^T$$

Квадратичные формы

12. Преобразовать к сумме квадратов квадратичную форму и выписать преобразование координат

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

13. Преобразовать к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

3.2.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков в ходе промежуточной аттестации

Процедура оценивания знаний (устный ответ)

Предел длительности	10 минут
Предлагаемое количество заданий	2 вопроса
Последовательность выборки вопросов из каждого раздела	Случайная
Критерии оценки	<ul style="list-style-type: none"> - требуемый объем и структура - изложение материала без фактических ошибок - логика изложения - использование соответствующей терминологии - стиль речи и культура речи - подбор примеров их научной литературы и практики
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов
«3» если	требования выполнены частично – не выдержан объем, есть фактические ошибки, нарушена логика изложения, недостаточно используется соответствующая терминологии

Процедура оценивания умений и навыков (решение проблемно-аналитических и практических учебно-профессиональных задач)

Предлагаемое количество заданий	1
Последовательность выборки	Случайная
Критерии оценки:	<ul style="list-style-type: none"> - выделение и понимание проблемы - умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения - полнота использования источников - наличие авторской позиции - соответствие ответа поставленному вопросу - использование социального опыта, материалов СМИ, статистических данных - логичность изложения - умение сделать квалифицированные выводы и обобщения с точки зрения решения профессиональных задач - умение привести пример

	- опора на теоретические положения - владение соответствующей терминологией
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов. Затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений
«3» если	требования выполнены частично – пытается обосновать свою точку зрения, однако слабо аргументирует научные положения, практически не способен самостоятельно сформулировать выводы и обобщения, не видит связь с профессиональной деятельностью

4. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

4.1. Электронные учебные издания

1. Березина, Н. А. Линейная алгебра : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 125 с. — ISBN 978-5-9758-1741-9. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/80988.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Михин, М. Н. Линейная алгебра. Ч. 1. Матрицы и определители : учебное пособие / М. Н. Михин, С. П. Курдина. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 106 с. — ISBN 978-5-4497-1349-0 (ч. 1), 978-5-4497-1402-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/111179.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Михин, М. Н. Линейная алгебра. Ч. 2. Системы линейных уравнений : учебное пособие / М. Н. Михин, С. П. Курдина. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 91 с. — ISBN 978-5-4497-1587-6 (ч. 2), 978-5-4497-1402-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/119112.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Утюпин, Ю. В. Линейная алгебра : учебное пособие / Ю. В. Утюпин. — Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2020. — 87 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/117100.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Ширкунова, Н. В. Линейная алгебра : практикум / Н. В. Ширкунова, Г. О. Вафодорова, Е. В. Ларькина. — Москва : Российская таможенная академия, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-9590-1095-9. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/105680.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4.2. Электронные образовательные ресурсы

1. Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт») [Электронный ресурс]. — URL: <https://urait.ru/>.
2. Электронно-библиотечная система ZNANIUM [Электронный ресурс]. — URL: <https://znanium.com/>.
3. Электронная библиотечная система «Консультант студента» [Электронный ресурс]. — URL: <https://www.studentlibrary.ru/>.
4. e-Library.ru: Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. — URL: <http://elibrary.ru/>.
5. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» [Электронный ресурс]. — URL: <http://cyberleninka.ru/>.

6. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» [Электронный ресурс]. – URL: <http://window.edu.ru/>.
7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. – URL: <http://fcior.edu.ru/>.

4.3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Обучающимся обеспечен доступ (удаленный доступ) к ниже следующим современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам:

1. Словари и энциклопедии на Академике [Электронный ресурс]. – URL: <http://dic.academic.ru>.
2. Система информационно-правового обеспечения «Гарант» [Электронный ресурс]. – URL: <http://ivo.garant.ru/>.

4.4. Комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства

1. Лицензионное программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных приложений Microsoft Office.
2. Свободно распространяемое программное обеспечение: свободные пакеты офисных приложений Apache Open Office, LibreOffice.
3. Программное обеспечение отечественного производства: справочно-правовая система «Гарант» (Электронный периодический справочник «Система ГАРАНТ»), образовательная платформа ЮРАЙТ (Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт»)), электронно-библиотечная система ZNANIUM, электронная библиотечная система «Консультант студента».

4.5. Оборудование и технические средства обучения

Для реализации дисциплины (модуля) используются учебные аудитории для проведения учебных занятий, которые оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, и помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева. Допускается замена оборудования его виртуальными аналогами.

Наименование учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы*	Оснащенность учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы оборудованием и техническими средствами обучения
Учебные аудитории для проведения учебных занятий	Учебная аудитория укомплектована специализированной мебелью, отвечающей всем установленным нормам и требованиям, оборудованием и техническими средствами обучения (мобильное мультимедийное оборудование).
Помещение для самостоятельной работы	Помещение оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева и к ЭБС.

* Номер конкретной аудитории указан в приказе об аудиторном фонде, расписании учебных занятий и расписании промежуточной аттестации.