

**Рабочая программа дисциплины (модуля) «Дифференциальные уравнения»,  
включая оценочные материалы**

**1. Требования к результатам обучения по дисциплине (модулю)**

**1.1. Перечень компетенций, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы**

Группа компетенций	Категория компетенций	Коды и содержание компетенций
Универсальные	-	-
Общепрофессиональные	-	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности
Профессиональные	-	-

**1.2. Компетенции и индикаторы их достижения, формируемых дисциплиной (модулем) в процессе освоения образовательной программы**

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Содержание индикатора компетенции
ОПК-1	ОПК-1.1	Применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

**1.3. Результаты обучения по дисциплине (модулю)**

**Цель изучения дисциплины (модуля)** – формирование математической культуры студентов, овладение современным аппаратом математики для дальнейшего использования в других областях естественнонаучного знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, подготовка к изучению и применению математических методов в профессиональной деятельности, к самостоятельному изучению тех разделов математики, которые могут потребоваться дополнительно в практической и исследовательской работе; формирование навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности и научной работе.

В результате изучения дисциплины (модуля) обучающийся должен

**знать:**

- принципы построения математических моделей с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений; основные типы дифференциальных уравнений; методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем;

**уметь:**

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого и высших порядков и нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений;

**владеть:**

- навыками сбора, анализа и использования информации, необходимой для решений дифференциальных уравнений.

**2. Объем, структура и содержание дисциплины (модуля)**

**2.1. Объем дисциплины (модуля)**

<i>Виды учебной работы</i>	<i>Формы обучения</i>
	<b>Очная</b>
<b>Общая трудоемкость:</b> зачетные единицы/часы	4/144
<b>Контактная работа:</b>	72
Лекции	36
Лабораторные работы	0
Практические занятия, семинары	36
<b>Промежуточная аттестация:</b> экзамен	36
<b>Самостоятельная работа (СР)</b>	36

## 2.2. Темы (разделы) дисциплины (модуля) с указанием отведенного на них количества часов по формам образовательной деятельности

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Виды учебной работы (в часах)							СР
		Контактная работа							
		Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа					
		Л	Иные	ПЗ	С	ЛР	Иные		
1.	Уравнения первого порядка	8	0	16	0	0	0	30	
2.	Уравнения «п»-го порядка	8	0	16	0	0	0	30	
3.	Нормальные системы уравнений.	16	0	32	0	0	0	60	

#### Примечания:

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, С – семинары, ЛР – лабораторные работы, СР – самостоятельная работа.

## 2.3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) и видам работ

### Содержание лекционного курса

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание лекционного курса
1.	Уравнения первого порядка	Понятие дифференциального уравнения. Различные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям: радиоактивный распад; движение системы материальных частиц; динамика конкурирующих популяций. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним. Динамическая и геометрическая интерпретация дифференциального уравнения. Решение уравнений методом изоклин. Задача Коши.
2.	Уравнения «п»-го порядка	Основные понятия. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Однородные уравнения. Фундаментальная структура решений однородного уравнения. Линейно зависимые и не зависимые решения. Определитель Вронского. Характеристическое уравнение и его корни. Структура общего решения однородного уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.
3.	Нормальные системы уравнений.	Задача Коши для нормальной системы. Свойства решений нормальной системы. Линейные системы. Методы решения однородных систем: метод интегрируемых комбинаций; метод исключения или метод сведения системы уравнений к одному более высокого порядка. Общее решение неоднородных систем.

### Содержание занятий семинарского типа

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Тип	Содержание занятий семинарского типа
1.	Уравнения первого порядка	ПЗ	Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Условие Липшица. Общее, частное и особое решение. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Методы решения линейных неоднородных уравнений: метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной); метод Эйлера; метод Бернуллы. Уравнение Бернуллы. Уравнение Дарбу-Миндинга. Уравнение Риккати.
2.	Уравнения «п»-го порядка	ПЗ	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные уравнения структура общего решения неоднородного линейного уравнения. Методы решения неоднородных линейных уравнений: метод Лагранжа

			(или метод вариации произвольной постоянной); метод неопределенных коэффициентов (метод подбора).
3.	Нормальные системы уравнений.	ПЗ	Метод вариации произвольных постоянных. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Первые интегралы нормальной системы. Автономная система и ее свойства.

### Содержание самостоятельной работы

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Содержание самостоятельной работы
1.	Уравнения первого порядка	Специальное уравнение Риккати и методы его интегрирования. Уравнения в полных дифференциалах. Условие Эйлера. Интегрирующий множитель, условия его существования. Уравнения в полных дифференциалах. Условие Эйлера. Интегрирующий множитель, условия его существования.
2.	Уравнения «n»-го порядка	Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Уравнения Эйлера.
3.	Нормальные системы уравнений.	Системы в симметрической форме. Нелинейные системы и методы их интегрирования.

### 3. Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

По дисциплине (модулю) предусмотрены следующие виды контроля качества освоения:

- текущий контроль успеваемости;
- промежуточная аттестация обучающихся по дисциплине (модулю).

#### 3.1. Оценочные материалы для проведения текущей аттестации по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые темы (разделы)	Наименование оценочного средства
1.	Уравнения первого порядка	Устный опрос. Дискуссии. Решение задач
2.	Уравнения «n»-го порядка	Устный опрос. Дискуссии. Решение задач
3.	Нормальные системы уравнений.	Устный опрос. Дискуссии. Решение задач

#### 3.1.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в процессе текущего контроля успеваемости

**Устный опрос. Дискуссионные процедуры**

**Тема № 1. Уравнения первого порядка**

**Занятие 1. Уравнения первого порядка: Уравнения с разделяющимися переменными**

*Вопросы для устного опроса*

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

*Вопросы для дискуссии*

1. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.
2. Задача Коши.

*Решение задач*

Изучить динамическую и геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения и решение уравнений методом изоклин.

**Занятие 2. Уравнения первого порядка: линейные однородные и неоднородные уравнения**

*Вопросы для устного опроса*

1. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Условие Липшица.
2. Метод вариации произвольной постоянной.

*2. Вопросы для дискуссии*

1. Уравнение Бернулли. Уравнение Дарбу-Миндинга. Уравнение Риккати.

*Решение задач*

Изучить методы интегрирования специального уравнения Риккати

### **Занятие 3. Уравнения первого порядка: уравнения в полных дифференциалах**

*Вопросы для устного опроса*

1. Условие Эйлера.
2. Условия его существования интегрирующего множителя.

*Вопросы для дискуссии*

1. Интегрирующий множитель
2. Общее, частное и особое решение.

*Решение задач*

Изучить вопрос зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных условий.

### **Тема № 2. Уравнения « $n$ »-го порядка**

#### **Занятие 1. Уравнения « $n$ »-го порядка: Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами**

*Вопросы для устного опроса*

1. Однородные уравнения.
2. Структура общего решения однородного уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.

*Вопросы для дискуссии*

1. Определитель Вронского.
2. Характеристическое уравнение и его корни.
3. Фундаментальная структура решений однородного уравнения.

*Решение задач*

Изучить линейно зависимые и не зависимые решения.

#### **Занятие 2. Уравнения « $n$ »-го порядка: Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами**

*Вопросы для устного опроса*

1. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения.
2. Методы решения неоднородных линейных уравнений.

*Вопросы для дискуссии*

1. Метод Лагранжа (или метод вариации произвольной постоянной)
2. Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора).

*Решение задач*

Изучить операционный и операторный методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения

#### **Занятие 3. Уравнения « $n$ »-го порядка: уравнения с переменными коэффициентами Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.**

*Вопросы для устного опроса*

1. Уравнения Эйлера.

*Вопросы для дискуссии*

1. Методы сведения уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами.

*Решение задач*

Изучить метод решения уравнения Чебышева.

### **Тема № 3. Нормальные системы уравнений**

#### **Занятие 1. Нормальные системы уравнений: Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.**

*Вопросы для устного опроса*

1. Свойства решений нормальной системы.
2. Линейные системы.
3. Методы решения однородных систем.

*Вопросы для дискуссии*

1. Метод интегрируемых комбинаций

2. Метод исключения или метод сведения системы уравнений к одному более высокого порядка.

*Решение задач*

Изучить решение систем методом Эйлера.

## **Занятие 2. Нормальные системы уравнений: Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами**

*Вопросы для устного опроса*

1. Общее решение неоднородных систем.
2. Метод вариации произвольных постоянных.
3. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.

*Вопросы для дискуссии*

1. Первые интегралы нормальной системы.
2. Метод вариации произвольных постоянных.

*Решение задач*

Изучить решение систем в симметрической форме.

## **Занятие 3. Нормальные системы уравнений: динамические системы**

*Вопросы для устного опроса*

1. Автономная система и ее свойства.

*Вопросы для дискуссии*

1. Уравнение траекторий
2. Закон движения материальной точки на фазовой плоскости.

*Решение задач*

Изучить элементы качественной теории дифференциальных уравнений и построение фазовых портретов.

**Решение задач**

Пример 1 Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени  $t$  имеющего начальную скорость  $v_0$ , движущегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги  $F=b-kv$  и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при  $t=0$  сила тяги определяется выражением  $F(t)=F_0=b-kv_0$ .

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е.  $v=v(t)$ , а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \text{ где } F=b-kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b-kv}{m}. \quad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b-kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (\*)

$$-\frac{1}{k} \ln|b-kv| = \frac{1}{m}t + C \quad \text{или} \quad t = -\frac{m}{k} \ln|b-kv| + C \quad (**)$$

В решении (\*\*) удовлетворим начальному условию –  $v(0)=v_0$ .

$$0 = -\frac{m}{k} \ln|b-kv_0| + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{m}{k} \ln|b-kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной  $C$  в общее решение (\*\*), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k} \ln|b-kv| + \frac{m}{k} \ln|b-kv_0|$$

или

$$t = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{b - kv_0}{b - kv} \right| = \left( F_0 = b - kv_0, F = b - kv \right) = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{F_0}{F} \right|$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t \frac{k}{m} = \ln \left| \frac{F_0}{F} \right| \Rightarrow \frac{F_0}{F} = e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F = F_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** Рассмотрим вентиляцию забоя объемом  $V(\text{м}^3)$ , в котором в процессе проведения работ накапливаются вредные газообразные выделения в количестве  $Z$  в час. Пусть обмен воздуха в течении 1 часа составляет  $M$  ( $\text{м}^3/\text{ч}$ ), причем приточный воздух содержит вредные вещества в концентрации  $\mu$  на 1  $\text{м}^3$ . Требуется найти концентрацию  $Z$  (на 1  $\text{м}^3$ ) вредных выделений в забое через время  $t$  после начала работы, если начальное значение этой концентрации (остаток загрязнений от предыдущей смены) составляет  $Z_0$ .

▲ За малый промежуток времени  $dt$  концентрация вредных выделений  $Z$  увеличивается на  $dZ$ . Следовательно общее количество выделений составит  $VdZ$  и оно будет состоять из выделений, принесенных приточным воздухом -  $\mu Mdt$ , и выделений образовавшихся в процессе работы -  $Zdt$  за вычетом количества вредных выделений, которое содержалось в извлеченном из забоя за время  $dt$  воздухе. Предположим, что за малый промежуток времени  $dt$  изменение концентрации вредных выделений равно  $-ZMdt$ . Следовательно, уравнение вентиляции забоя имеет вид:

$$VdZ = \mu Mdt + Zdt - ZMdt \quad \text{или} \quad \frac{dZ}{dt} - \frac{1-M}{V}Z = \frac{\mu M}{V}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением, которое будем решать используя сразу формулу общего решения (1.51):

$$Z = e^{\frac{1-M}{V} \int dt} \left[ C_1 + \frac{\mu M}{V} \int e^{-\frac{1-M}{V} \int dt} dt \right] = e^{\frac{1-M}{V}t} \left[ C_1 - \frac{\mu M}{V} \cdot \frac{V}{1-M} e^{-\frac{1-M}{V}t} \right] \quad \text{или}$$

$$Z = C_1 e^{\frac{1-M}{V}t} - \frac{\mu M}{1-M}$$

Удовлетворяя начальному условию  $Z(0) = Z_0$ , определим значение произвольной постоянной  $Z_0 = C_1 - \frac{\mu M}{1-M}$ ,  $\Rightarrow C_1 = Z_0 + \frac{\mu M}{1-M}$ . Таким образом, окончательное решение исходной задачи имеет вид:

$$Z = Z_0 e^{\frac{1-M}{V}t} + \frac{\mu M}{1-M} \left( e^{\frac{1-M}{V}t} - 1 \right) \quad \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени  $t$  имеющего начальную скорость  $v_0$ ,двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги  $F = b - kv$  и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при  $t = 0$  сила тяги определяется выражением  $F(t) = F_0 = b - kv_0$ .

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е.  $v = v(t)$ , а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \quad \text{где } F = b - kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m} \quad (\square)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными

переменными

$$\frac{dv}{b-kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (□)

$$-\frac{1}{k} \ln|b-kv| = \frac{1}{m}t + C \quad \text{или} \quad t = -\frac{m}{k} \ln|b-kv| + C \quad (\square\square)$$

В решении (□□) удовлетворим начальному условию –  $v(0)=v_0$ .

$$0 = -\frac{m}{k} \ln|b-kv_0| + C \Rightarrow C = \frac{m}{k} \ln|b-kv_0|$$

Подставив найденное значение постоянной  $C$  в общее решение (□□), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k} \ln|b-kv| + \frac{m}{k} \ln|b-kv_0|$$

или

$$t = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{b-kv_0}{b-kv} \right| = \left( F_0 = b-kv_0, F = b-kv \right) = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{F_0}{F} \right|$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t \frac{k}{m} = \ln \left| \frac{F_0}{F} \right| \Rightarrow \frac{F_0}{F} = e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F = F_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \blacktriangle$$

**Пример 4.** Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищенный изоляцией толщиной 10 см отопляет рабочее помещение при этом температура трубы 160°C, а внешнего ее покрова 30°C. Определить распределение температуры внутри изоляции, если коэффициент теплопроводности  $k = 0,00017$ , а также количество теплоты, отдаваемой 1 м трубы.

▲ Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура  $T$  в каждой его точке есть функция только одной координаты  $x$ , то, в соответствии с законом теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду будет равно

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = \text{const} \quad (1)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, а площадь сечения тела  $S(x)$  определяется по формуле

$$S(x) = 2\pi x l,$$

где  $x$  – радиус трубопровода,  $l$  – длина трубы, следовательно, уравнение (1) можно записать в виде

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = -2\lambda\pi x l \frac{dT}{dx}$$

или

$$Q + 2\lambda\pi x l \frac{dT}{dx} = 0 \quad (2)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (2) получим

$$dT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \cdot \frac{dx}{x} \quad (3)$$

По условию задачи необходимо определить распределение температуры внутри изоляции. Поэтому сначала левую часть уравнения (3) интегрируем в пределах от 160°C до 30°C, а

правую часть интегрируем в пределах от 10 до 20 см.

$$\int_{160}^{30} dt T = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \int_{10}^{20} \frac{dx}{x};$$

После интегрирования уравнения (3), находим

$$T|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln x|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln 2 \quad (4)$$

Затем, проинтегрируем левую часть уравнения (3) в пределах от 160°C до некоторой температуры  $T$ , а правую часть интегрируем в пределах от 10 до  $x$  см. После интегрирования уравнения (3), находим

$$\int_{160}^T dt T = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \int_{10}^x \frac{dx}{x};$$

$$T|_{160}^T = T - 160 = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln x|_{10}^x = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln 0,1 x \quad (5)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (4), получим

$$\frac{T - 160}{-130} = \frac{\ln 0,1 x}{\ln 2}$$

Из этого уравнения следует, что закон распределения температуры внутри изоляции будет иметь вид

$$T = 591,8 - 431,8 \ln x$$

Кроме того, по условию задачи необходимо определить количество теплоты отдаваемой 1 м трубы. Поэтому для того, чтобы выполнить условие задачи необходимо из уравнения (4) при  $l = 100$  см выразить  $Q$  и рассчитать его значение

$$Q = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100}{\ln 2} = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100}{0,69315} = 1730600 \text{ ккал} \quad \blacktriangle$$

Пример.5 Кусок рудной массы  $m$  падает в рудоспуск под действием силы тяжести, при этом воздух оказывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения куска.

▲ Пусть  $s$  — расстояние, пройденное телом к моменту  $t$ . Тогда движение определяется уравнением

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$$

которое может быть представлено в виде

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (1)$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

где скорость  $v = \frac{ds}{dt}$ . Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Риккати.

Разделяя в нем переменные, имеем

$$\frac{mdv}{mg - kv^2} = dt$$



или после сокращения левой части равенства на  $m$

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = t + C \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (2) применяем метод неопределенных коэффициентов, и тогда

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int \frac{A dv}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} + \int \frac{B dv}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v} \quad (3)$$

Откуда

$$A - B = 0$$

$$A + B = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

или

$$A = B = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в интеграл (3), имеем

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gk}} \int \frac{d\left(g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gk}} \int \frac{d\left(g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)} = t + C$$

Для краткости обозначим  $\sqrt{\frac{gk}{m}} = r$ . Тогда после умножения равенства на  $2\sqrt{\frac{gk}{m}}$  находим

$$\int \frac{d(g+rv)}{g+rv} - \int \frac{d(g-rv)}{g-rv} = 2r(t+C)$$

или

$$\ln(g+rv) - \ln(g-rv) = 2rt + 2rC$$

откуда

$$\ln\left(\frac{g+rv}{g-rv}\right) = 2rt + 2rC \quad (4)$$

Потенцируя уравнение (4), получаем

$$\frac{g+rv}{g-rv} = e^{2rt+2rC} = e^{2rt} e^{2rC} = \left\{ e^{2rC} = C_1 \right\} = C_1 e^{2rt}$$

Откуда искомая функция имеет вид

$$v = \frac{g}{r} \cdot \frac{(C_1 e^{2rt} - 1)}{(C_1 e^{2rt} + 1)}$$

или с учетом того, что  $g = \frac{r^2 m}{k}$  и  $C_1 = \frac{1}{C}$ , получим

$$v = \frac{rm}{k} \cdot \frac{(e^{rt} - C e^{-rt})}{(e^{rt} + C e^{-rt})} \quad (5)$$

Из уравнения (5) очевидно, что при  $t$ , стремящемся к бесконечности, скорость  $v$  достигает предельного значения

$$v_{\max} = V,$$

для которого

$$V = \frac{rm}{k} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Следовательно, уравнение (5) записывается в виде

$$v = V \cdot \frac{(e^{rt} - C e^{-rt})}{(e^{rt} + C e^{-rt})} \quad (6)$$

Начальное условие: при  $t = 0$   $v = v_0$ .

Пусть ради краткости записи  $u_0 = v_0/V$ . Тогда постоянная интегрирования  $C^*$  в уравнении (6) принимает значение

$$C = \frac{1 - u_0}{1 + u_0}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), замечаем, что  $v$  может быть записана в виде

$$v = V \cdot \frac{(u_0 + \text{th } rt)}{(1 + u_0 \text{ th } rt)}$$

Принимая, что при  $t = 0$   $s = 0$ , можем теперь определить закон движения  $s$ :

$$s = \int_0^t v(t) dt = \frac{V}{r} \ln(\text{ch } rt + u_0 \text{ sh } rt)$$

Подставляя  $r = \frac{g}{V}$  и  $u_0 = \frac{v_0}{V}$  в это равенство, окончательно получаем искомый закон движения

$$s = \frac{V^2}{g} \ln \left( \text{ch } \frac{gt}{V} + \frac{v_0}{V} \text{ sh } \frac{gt}{V} \right) . \blacktriangle$$

Пример 6. Найти решения уравнения:

$$(x^3 y - 3x^2 y + y^3) dx + 2x^3 dy = 0$$

▲ Разделив обе части исходного уравнения на  $dx \neq 0$  ( $x=0$  – очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3 \frac{dy}{dx} + (x^3 - 3x^2) y = -y^3$$

Считая  $y \neq 0$  ( $y=0$  – тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на  $(-y^3)$  и

делаем замену  $z(x)=y^{-2}$ . Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3}=z'(x), \quad x^3 z' - (x^3 - 3x^2)z = 1.$$

Решая это уравнение, находим

$$z(x) = C_1 x^{-3} e^x - x^{-3}.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения

$$C_1 y^2 e^x - y^2 - x^3 = 0; \quad x=0; \quad y=0. \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения:

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

▲ Это уравнение является уравнением Риккати, в котором  $a(x) = -1$ ,  $b(x) = 0$  и  $c(x) = 1 + x^2$ .

Проверка условия  $c(x) = -a(x)x^2 - b(x)x + 1$ . Привело к результату:  $1 + x^2 = 1 + x^2$ . Следовательно, это условие выполняется и за частное решение исходного уравнения

можно принять функцию:  $y_1 = x$ . Таким образом, полагая  $y = x + \frac{1}{z}$  и вычислив

$y' = 1 - z^{-2} z'$ , приводим исходное уравнение к неоднородному линейному уравнению:  $z' - 2xz = 1$ . Откуда

$$z = e^{x^2} \left( C + \int e^{-x^2} dx \right).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения Риккати имеет вид:

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx}. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Найти общий интеграл уравнения:

$$(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 2)dy = 0.$$

▲ Установим, является ли исходное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого проверим, выполняется ли условие Эйлера (1.87). Здесь

$$M(x, y) = x + y - 1, \quad \text{а} \quad N(x, y) = x - y^2 + 2.$$

Вычислим производные  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$ :  $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$  и  $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ , следовательно, условие Эйлера выполнено, и исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию  $u(x, y)$  по изложенной выше схеме, а именно,

предположим, чтобы выполнялось равенство  $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1,$$

отсюда

$$u(x, y) = \int (x + y - 1)dx + \phi(y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + \phi(y).$$

Далее потребуем от  $u(x, y)$  обеспечения равенства  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x^2}{2} + xy - x + \phi(y) \right] = N(x, y) = x - y^2 + 2,$$

или  $0 + x - 0 + \phi'(y) = x + \phi'(y) = x - y^2 + 2$ , или  $\phi'(y) = -y^2 + 2$ . Следовательно,  

$$\phi(y) = \int (-y^2 + 2) dy = -\frac{y^3}{3} + 2y$$

Таким образом, искомая функция и соответственно общий интеграл исходного уравнения будут иметь вид:

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y = C$$

Получим общий интеграл исходного уравнения, потребовав выполнения равенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

$$u(x, y) = \int (x - y^2 + 2) dy + \psi(x) = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \psi(x)$$

, а теперь потребуем, чтобы выполнялось  $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ :  $y + \psi'(x) = x + y - 1$ . Найдем  $\psi(x) = \int (x - 1) dx = \frac{x^2}{2} - x$ .

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$C = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \frac{x^2}{2} - x$$

Следовательно, независимо от того, какое из условий (1.86) будет выполняться в первую очередь, общий интеграл исходного уравнения будет одним и тем же.

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (1.89):

$$\int_{x_0}^x (x + y - 1) dx + \int (x_0 - y^2 + 2) dy = C$$

Выполним интегрирование:

$$\left( \frac{x^2}{2} + xy - x \right) \Big|_{x_0}^x + \left( x_0 y - \frac{y^3}{3} + 2y \right) \Big|_{y_0}^y = C$$

или

$$\frac{x^2}{2} + xy - x - \left( \frac{x_0^2}{2} + x_0 y - x_0 \right) + \left( x_0 y - \frac{y^3}{3} + 2y \right) - \left( x_0 y_0 - \frac{y_0^3}{3} + 2y_0 \right) = C$$

т.к.  $x_0, y_0$  можно брать произвольно, то, обозначив

$$C_1 = C + \frac{x_0^2}{2} - x_0 + x_0 y_0 + 2y_0 - \frac{y_0^3}{3}, \text{ окончательно получим}$$

$$C_1 = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y. \blacktriangle$$

$$y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$$

Пример 9. Найти решения уравнения:

▲ Разрешив это уравнение относительно  $x$  и, полагая в этом уравнении  $y' = p$ , получим

$$x = \frac{y}{p} \ln p$$

Так как  $dy = p dx$ , то

$$dy = p d\left(\frac{y}{p} \ln p\right) = \frac{y}{p} dp + \ln p dy - \frac{y}{p} \ln p dp$$

или

$$(1 - \ln p) \left( dy - \frac{y}{p} dp \right) = 0.$$

Из этого уравнения находим:  $p = e$  и  $p = Cy$ . Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид:

$$x = \frac{y}{e} \quad \text{и} \quad Cx = \ln Cy. \quad \blacktriangle$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения:  $y'' - y = 0$ .

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение:  $\lambda^2 - 1 = 0$ .

2. Найдем корни этого уравнения:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

3. Поскольку корни действительные и различные, то по правилу 1 им ставятся в соответствие функции  $y_1 = e^x$ , и  $y_2 = e^{-x}$ , которые составляют фундаментальную систему линейно независимых решений исходного уравнения. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Найти общее решение уравнения:

$$y^{(5)} - 5y^{(4)} + 18y^{(3)} - 34y^{(2)} + 45y' - 25y = 0.$$

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 18\lambda^3 - 34\lambda^2 + 45\lambda - 25 = 0.$$

2. Это характеристическое уравнение имеет корни:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i, \lambda_{4,5} = 1 \pm 2i.$$

3. Мы видим, что среди корней характеристического уравнения есть как действительные и различные корни, так и комплексно сопряженные, причем комплексные корни являются кратными. Поэтому для составления фундаментальной системы линейно независимых решений воспользуемся правилами 1, 2 и 3. Корню  $\lambda_1 = 1$  соответствует решение  $y_1 = e^x$ , а каждому из двукратных корней  $\lambda_{2,4} = 1 + 2i$  и  $\lambda_{3,5} = 1 - 2i$ , отвечают решения:  $y_2 = e^x \cos 2x, y_3 = xe^x \cos 2x, y_4 = e^x \sin 2x, y_5 = xe^x \sin 2x$ . Совокупность этих пяти решений  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  - образует фундаментальную систему линейно независимых решений. Следовательно, общее решение запишется так:

$$y = C_1 e^x + e^x [(C_2 + xC_3) \cos 2x + (C_4 x + C_5) \sin 2x]. \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Найти частное и общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

▲ В соответствии с методом Лагранжа, составим соответствующее этому неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

и решим его. Для этого запишем характеристическое уравнение:  $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ . Это характеристическое уравнение имеет корни:  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ .

Мы видим, что корни характеристического уравнения комплексные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Будем искать частное решение исходного уравнения в виде

$$y = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x \quad (*)$$

Составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} \cos x + C_2'(x) e^{2x} \sin x = 0 \\ C_1'(x) e^{2x} \sin x - C_2'(x) e^{2x} \cos x = 1 \end{cases}$$

или сокращая на  $e^{2x}$ ,

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x) \sin x - C_2'(x) \cos x = 1 \end{cases} \quad (**)$$

Решить эту систему относительно  $C_1'$  и  $C_2'$  можно различными способами, например, используя правило Крамера. В данном случае удобнее сначала преобразовать второе уравнение, а именно, умножить обе его части первого уравнения на  $-2$  и затем прибавить полученный результат ко второму. В итоге получим уравнение:

$$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

и, следовательно, этим уравнением можно заменить второе уравнение в системе (\*\*)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x) \sin x - C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x, \Rightarrow C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x dx = \ln |\cos x|,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1} = 1, \Rightarrow C_2(x) = \int dx = x.$$

Подставляя полученные значения  $C_1'$  и  $C_2'$  в (\*), получим частное решение исходного неоднородного уравнения

$$y_{\text{частное}}(x) = e^{2x} (\cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x)$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (\cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x) \quad \blacktriangle$$

Пример 13. Найти частное решение уравнения:  $y'' - y = x e^x$ .

▲ 1. Для правой части исходного уравнения определяем параметры  $\alpha, \beta, q, l$ :  $\alpha = 1, \beta = 0, q = 1$ .

2. Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - 1 = 0$  действительные и различные,  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Учитывая, что число  $(\alpha + i\beta) = 1$  совпадает с корнем  $\lambda_1 = 1$  кратности 1, то тогда  $s = 1$ , и  $m = \max(q, l) = 1$ . Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного

решения:

$$y_u(x) = e^x (A_0 x + A_1)$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для  $y_u(x)$  и ее второй производной

$$y_u''(x) = e^x [A_0 x^2 + x(4A_0 + A_1) + 2A_1 + 2A_0]$$

После преобразований (сокращения на  $e^x$  и приведения подобных) получаем равенство:

$$4A_0 x + 2A_0 + 2A_1 = x$$

В этом равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях функции переменной  $x$  в правой и левой частях:

$$x^1: 4A_0 = 1$$

$$x^0: 2A_0 + 2A_1 = 0, \text{ откуда следует, что } A_0 = \frac{1}{4}, A_1 = -\frac{1}{4}$$

Полученные значения неопределенных коэффициентов  $A_0$  и  $A_1$  подставив в вид искомого частного решения, получим окончательно:

$$y_u(x) = \frac{1}{4} e^x (x^2 - x) \quad \blacktriangle$$

Пример 14. Найти частное решение уравнения:

$$y''' - y'' + 3y' + 5y = 5e^{2x} \cos x + 4e^{-x}$$

▲ Прежде всего, функцию  $f(x)$  представим в виде суммы двух функций  $f_1(x) = 5e^{2x} \cos x$  и  $f_2(x) = 4e^{-x}$ . Для каждого случая будем подбирать свое частное решение исходного уравнения.

1. Для функции  $f_1(x)$  определяем параметры  $\alpha, \beta, q, l$ :  $\alpha = 2, \beta = 1, q = 0$ , а для функции  $f_2(x)$  соответственно  $\alpha = \square\square, \beta = \square\square\square, q = 0$ .

2. Характеристическое уравнение  $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$  имеет корни:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

Учитывая, что для функции  $f_1(x)$  число  $(\alpha + i\beta) = 2 + i$  не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому  $s = 0$ , а для функции  $f_2(x)$  число  $(\alpha + i\beta) = -1$  совпадает с корнем  $\lambda_1$  кратности 1. Исходя из этого, можно выписать частное решение:

$$y_u(x) = y_{u1}(x) + y_{u2}(x) = e^{2x} (A_0 \cos x + B_0 \sin x) + D_0 x e^{-x}$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для  $y_u(x)$  и его производных и находим значения неопределенных коэффициентов  $A_0, B_0, D_0$ . Для удобства определения этих коэффициентов подставим  $y_{u1}(x)$  в уравнение с правой частью  $f_1(x)$ , а  $y_{u2}(x)$  в уравнение с правой частью  $f_2(x)$ .

Подставляем  $y_{u1}(x) = e^{2x} (A_0 \cos x + B_0 \sin x)$  и производные:

$$y_{u1}'(x) = e^{2x} (2A_0 \cos x + 2B_0 \sin x - A_0 \sin x + B_0 \cos x),$$

$$y_{u1}''(x) = e^{2x} (3A_0 \cos x + 3B_0 \sin x - 4A_0 \sin x + 4B_0 \cos x),$$

$$y_{u1}'''(x) = e^{2x} (2A_0 \cos x + 2B_0 \sin x - 11A_0 \sin x + 11B_0 \cos x)$$

в исходное уравнение с правой частью  $f_1(x) = 5e^{2x} \cos x$ . Сокращая на  $e^{2x}$  и приравнивая коэффициенты при  $\cos x$  и  $\sin x$  в правой и левой частях полученного равенства, будем иметь систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 2A_0 + 11B_0 - 3A_0 - 4B_0 + 6A_0 + 3B_0 + 5A_0 = 5, \\ \end{cases}$$

или после преобразований

$$\begin{cases} 10A_0 + 10B_0 = 5, \\ \end{cases}$$

откуда находим, что

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{4}, \Rightarrow y_{u1}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x)$$

Далее подставляем функцию  $f_2(x) = D_0 x e^{-x}$  и ее производные:

$$y'_{u2}(x) = D_0 e^{-x} (-x + 1), y''_{u2}(x) = D_0 e^{-x} (x - 2), y'''_{u2}(x) = D_0 e^{-x} (3 - x)$$

в исходное уравнение с правой частью равной  $4e^{-x}$ . Сократив на  $e^{-x}$ , получим равенство  $8D_0 = 4$ , то есть  $D_0 = 1/2$ , следовательно

$$y_{u2}(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения запишем в виде суммы двух частных решений, и окончательно оно будет иметь вид:

$$y_u(x) = y_{u1}(x) + y_{u2}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} x e^{-x} \quad \blacktriangle$$

Пример 15. Найти решение уравнения:  $x^2 y'' - x y' + y = 0$

▲ Полагая  $x = e^t$  или  $t = \ln x$ , найдем  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$ .

Вычислим производные по новой переменной  $t$ , обозначив точками дифференцирование по  $t$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = \dot{y} e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\dot{y} e^{-t}) \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}$$

Подставив  $\dot{y}, \ddot{y}$  в исходное уравнение, получим

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} \cdot \dot{y} + y = 0, \text{ или } \{ \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0 \}$$

Следовательно, мы получили однородное линейное уравнение. Его характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Поскольку корни действительные и кратные, с кратностью равной двум, то общее решение будет иметь вид:

$$y(t) = (C_1 + t C_2) e^t$$

Перейдя к переменной  $x$ , окончательно получим общее решение исходного уравнения

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x) x \quad \blacktriangle$$

Пример 16. Найти решение уравнения:

$$x^2 y'' - x y' + y = \cos \ln x$$

▲ Полагая  $x = e^t$  или  $t = \ln x$ , найдем  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$ .

Вычислим производные по новой переменной  $t$ , обозначив точками дифференцирование по  $t$ :

$$y' = \dot{y} e^{-t}, y'' = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}$$



Подставив  $\dot{y}, \ddot{y}$  в исходное уравнение, получим

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t \quad (*).$$

Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующего ему однородного уравнения (см. *пример 36*) имеет вид

$$y(t) = (C_1 + tC_2)e^t,$$

а частное решение можно получить методом неопределенных коэффициентов.

Поскольку параметры правой части неоднородного уравнения (\*) равны, соответственно,  $\alpha = 0, \beta = 1, q = 0, l = 0$  и число  $(\alpha + i\beta) = i\beta$  не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому  $s = 0$ , и  $m = \max(q, l) = 0$ . Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_u(t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t$$

Вычислим производные от  $y_u(t)$

$$\dot{y}_u(t) = -A_0 \sin t + B_0 \cos t,$$

$$\ddot{y}_u(t) = -A_0 \cos t - B_0 \sin t$$

и подставив их в уравнение (\*), получим

$$-2B_0 \cos t + 2A_0 \sin t \equiv \cos t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях этого уравнения

$$-2B_0 = 1, \Rightarrow B_0 = -\frac{1}{2},$$

$$2A_0 = 0, \Rightarrow A_0 = 0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (\*) имеет вид

$$y_u(t) = -\frac{1}{2} \sin t,$$

а общее решение уравнения (\*) будет выглядеть так:

$$y_{\text{общее}}(t) = (C_1 + tC_2)e^t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x - \frac{1}{2} \sin \ln x. \quad \blacktriangle$$

### 3.1.2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности в ходе текущего контроля успеваемости

#### Устный ответ

Оценка знаний предполагает дифференцированный подход к обучающемуся, учет его индивидуальных способностей, степень усвоения и систематизации основных понятий и категорий по дисциплине. Кроме того, оценивается не только глубина знаний поставленных вопросов, но и умение использовать в ответе практический материал. Оценивается культура речи, владение навыками ораторского искусства.

*Критерии оценивания:* последовательность, полнота, логичность изложения, анализ различных точек зрения, самостоятельное обобщение материала, использование профессиональных терминов, культура речи, навыки ораторского искусства. Изложение материала без фактических ошибок.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда материал излагается исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно, при этом раскрываются не только основные понятия, но и анализируются точки зрения различных авторов. Обучающийся

не затрудняется с ответом, соблюдает культуру речи.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, знает практическую базу, но при ответе на вопрос допускает несущественные погрешности.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся освоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении материала, затрудняется с ответами, показывает отсутствие должной связи между анализом, аргументацией и выводами.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не отвечает на поставленные вопросы.

#### **Кейсы (ситуации и задачи с заданными условиями)**

Обучающийся должен уметь выделить основные положения из текста задачи, которые требуют анализа и служат условиями решения. Исходя из поставленного вопроса в задаче, попытаться максимально точно определить проблему и соответственно решить ее.

Задачи могут решаться устно и/или письменно. При решении задач также важно правильно сформулировать и записать вопросы, начиная с более общих и, кончая частными.

*Критерии оценивания* – оценка учитывает методы и средства, использованные при решении ситуационной, проблемной задачи.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда обучающийся выполнил задание (решил задачу), используя в полном объеме теоретические знания и практические навыки, полученные в процессе обучения.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающийся в целом выполнил все требования, но не совсем четко определяется опора на теоретические положения, изложенные в научной литературе по данному вопросу.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся показал положительные результаты в процессе решения задачи.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся не выполнил все требования.

#### **Дискуссионные процедуры**

*Круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты, мини-конференции* являются средствами, позволяющими включить обучающихся в процесс обсуждения спорного вопроса, проблемы и оценить их умение аргументировать собственную точку зрения. Задание дается заранее, определяется круг вопросов для обсуждения, группы участников этого обсуждения.

Дискуссионные процедуры могут быть использованы для того, чтобы студенты:

- лучше поняли усвояемый материал на фоне разнообразных позиций и мнений, не обязательно достигая общего мнения;

- смогли постичь смысл изучаемого материала, который иногда чувствуют интуитивно, но не могут высказать вербально, четко и ясно, или конструировать новый смысл, новую позицию;

- смогли согласовать свою позицию или действия относительно обсуждаемой проблемы.

*Критерии оценивания* – оцениваются действия всех участников группы. Понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Соответствие реальной действительности решений, выработанных в ходе игры. Владение терминологией, демонстрация владения учебным материалом по теме игры, владение методами аргументации, умение работать в группе (умение слушать, конструктивно вести беседу, убеждать, управлять временем, бесконфликтно общаться), достижение игровых целей, (соответствие роли – при ролевой игре). Ясность и стиль изложения.

Оценка «отлично» ставится в случае, когда все требования выполнены в полном объеме.

Оценка «хорошо» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия полностью соответствуют заданным целям. Решения, выработанные в ходе игры, полностью соответствуют реальной действительности. Но некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены нормы общения, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающиеся в целом демонстрируют понимание проблемы, высказывания и действия в целом соответствуют заданным целям. Однако, решения, выработанные в ходе игры, не совсем соответствуют реальной действительности. Некоторые объяснения не совсем аргументированы, нарушены временные рамки, нарушен стиль изложения.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающиеся не понимают проблему, их высказывания не соответствуют заданным целям.

### 3.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

#### 3.2.1. Критерии оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Шкала оценивания	Результаты обучения	Показатели оценивания результатов обучения
ОТЛИЧНО	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся глубоко и всесторонне усвоил материал, уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы,</li> <li>- на основе системных научных знаний делает квалифицированные выводы и обобщения, свободно оперирует категориями и понятиями.</li> </ul>
	Умеет:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся умеет самостоятельно и правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, используя научные понятия, ссылаясь на нормативную базу.</li> </ul>
	Владеет:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся владеет рациональными методами (с использованием рациональных методик) решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.;</li> <li>При решении продемонстрировал навыки</li> <li>- выделения главного,</li> <li>- связкой теоретических положений с требованиями руководящих документов,</li> <li>- изложения мыслей в логической последовательности,</li> <li>- самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.</li> </ul>
ХОРОШО	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся твердо усвоил материал, достаточно грамотно его излагает, опираясь на знания основной и дополнительной литературы,</li> <li>- затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений, оперирует категориями и понятиями, но не всегда правильно их верифицирует.</li> </ul>
	Умеет:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся умеет самостоятельно и в основном правильно решать учебно-профессиональные задачи или задания, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагать свое решение, не в полной мере используя научные понятия и ссылки на нормативную базу.</li> </ul>
	Владеет:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся в целом владеет рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.;</li> <li>При решении смог продемонстрировать достаточность, но не глубинность навыков,</li> <li>- выделения главного,</li> <li>- изложения мыслей в логической последовательности,</li> <li>- связки теоретических положений с требованиями руководящих документов,</li> <li>- самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.</li> </ul>
УДОВЛЕТВО-	Знает:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обучающийся ориентируется в материале, однако затрудняется в его</li> </ul>

РИТЕЛЬНО		изложении; - показывает недостаточность знаний основной и дополнительной литературы; - слабо аргументирует научные положения; - практически не способен сформулировать выводы и обобщения; - частично владеет системой понятий.
	Умеет:	- обучающийся в основном умеет решить учебно-профессиональную задачу или задание, но допускает ошибки, слабо аргументирует свое решение, недостаточно использует научные понятия и руководящие документы.
	Владеет:	- обучающийся владеет некоторыми рациональными методами решения сложных профессиональных задач, представленных деловыми играми, кейсами и т.д.; При решении продемонстрировал недостаточность навыков - выделения главного, - изложения мыслей в логической последовательности, - связи теоретических положений с требованиями руководящих документов, - самостоятельного анализа факты, событий, явлений, процессов в их взаимосвязи и диалектическом развитии.
НЕУДОВЛЕТВО- РИТЕЛЬНО	Знает:	- обучающийся не усвоил значительной части материала; - не может аргументировать научные положения; - не формулирует квалифицированных выводов и обобщений; - не владеет системой понятий.
	Умеет:	обучающийся не показал умение решать учебно-профессиональную задачу или задание.
	Владеет:	не выполнены требования, предъявляемые к навыкам, оцениваемым «удовлетворительно».

### 3.2.2. Контрольные задания и/или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

#### Список вопросов для устных ответов (варианты теста)

1. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Динамические и автономно динамические системы.
3. Задача Коши для нормальной системы.
4. Системы уравнений в симметрической форме.
5. Методы интегрирования систем- метод интегрируемых комбинаций.
6. Метод сведения системы уравнений к одному уравнению более высокого порядка.
7. Линейные системы дифференциальных уравнений. Общие свойства систем.
8. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной системы с постоянными коэффициентами.
9. Линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
10. Устойчивость решения дифференциального уравнения
11. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Виды задания решения.
12. Задача Коши для уравнения первого порядка.
13. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним
14. Линейные уравнения первого порядка. Алгоритм решения однородного уравнения.
15. Неоднородные линейные уравнения первого порядка. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).
16. Неоднородные линейные уравнения первого порядка. Метод Бернулли
17. Уравнения первого порядка, приводящиеся к линейным. Уравнения Бернулли.
18. Уравнения в полных дифференциалах. Условия, при которых уравнение первого порядка является уравнением в полных дифференциалах. Вид общего интеграла.
19. Геометрическое истолкование уравнения первого порядка. Графическое решение уравнения - метод изоклин.
20. Формулировка условия Липшица.

21. Уравнения первого порядка, приводящиеся к линейным.
22. Линейные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.
23. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Постановка задачи Коши.
24. Линейные однородные уравнения  $n$ -го порядка. Основные понятия. Свойства решений. Линейно независимые и зависимые решения. Фундаментальная система решений.
25. Линейные однородные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Структура фундаментальной системы в зависимости от корней характеристического уравнения.
26. Линейные однородные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Правила построения общего решения.
27. Алгоритм нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).
28. Алгоритм нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка методом неопределенных коэффициентов.
29. Линейные однородные уравнения  $n$ -го порядка, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.
30. Линейные однородные уравнения  $n$ -го порядка, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами. Уравнение Чебышева.

**Тексты проблемно-аналитических и (или) практических учебно-профессиональных задач**

1. Какое уравнение называют дифференциальным?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют решением дифференциального уравнения?
4. Какое дифференциальное уравнение называют обыкновенным?
5. Какое дифференциальное уравнение называют уравнением в частных производных?
6. Приведите общий вид уравнения первого порядка.
7. Сформулируйте задачу Коши.
8. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши?
9. Сформулируйте Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
10. Сформулируйте условие Липшица.
11. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
12. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
13. Проверить, что функция  $y = x + C$  есть общее решение дифференциального уравнения  $y' = 1$  и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=0}=0$ . Дать геометрическое истолкование результата.
14. Проверить, что функция  $y = Ce^x$  есть общее решение дифференциального уравнения  $y' - y = 0$  и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=1}=-1$ . Дать геометрическое истолкование результата.
15. Дифференциальное уравнение какого вида называется уравнением с разделяющимися переменными?
16. Запишите общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
17. Решить уравнение:  $3e^x \cdot \operatorname{tg}(y) \cdot dx + (2 - e^x) \cdot \sec(2y) \cdot dy = 0$ .
18. Найти частное решение уравнения  $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ , удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=0}=1$ .
19. Найти частные решения уравнения  $y' \cdot \sin(x) = y \cdot \ln x$ , удовлетворяющие начальным условиям: а)  $y|_{x=\pi/2}=e$ ; б)  $y|_{x=\pi/2}=1$ .

20. Найти такую кривую, проходящую через точку  $(0; -2)$ , чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы.
21. Найти кривую, обладающую тем свойством, что длина ее дуги, заключенной между какими-либо двумя точками  $P$  и  $Q$ , пропорциональна разности расстояний этих точек от неподвижной точки  $O$ .
22. Допустим, что при постоянной температуре скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна количеству этого вещества, еще могущего раствориться в жидкости до насыщения последней (предполагается, что вещества, входящие в раствор, химически не действуют друг на друга, и раствор далек еще от насыщения, так как иначе линейный закон для скорости растворения неприменим). Найти зависимость количества растворившегося вещества от времени.
23. В цилиндрическом сосуде объемом  $V_0$  заключен атмосферный воздух, который адиабатически (без обмена тепла с окружающей средой) сжимается до объема  $V_1$ . Вычислить работу сжатия.
24. Найти решение уравнения:  $x^3 \cdot \sin(y) \cdot y' = 2$ , удовлетворяющее условию:  $y \rightarrow \pi/2$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

### 3.2.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков в ходе промежуточной аттестации

#### Процедура оценивания знаний (устный ответ)

Предел длительности	10 минут
Предлагаемое количество заданий	2 вопроса
Последовательность выборки вопросов из каждого раздела	Случайная
Критерии оценки	<ul style="list-style-type: none"> <li>- требуемый объем и структура</li> <li>- изложение материала без фактических ошибок</li> <li>- логика изложения</li> <li>- использование соответствующей терминологии</li> <li>- стиль речи и культура речи</li> <li>- подбор примеров их научной литературы и практики</li> </ul>
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов
«3» если	требования выполнены частично – не выдержан объем, есть фактические ошибки, нарушена логика изложения, недостаточно используется соответствующая терминология

#### Процедура оценивания умений и навыков (решение проблемно-аналитических и практических учебно-профессиональных задач)

Предлагаемое количество заданий	1
Последовательность выборки	Случайная
Критерии оценки:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- выделение и понимание проблемы</li> <li>- умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения</li> <li>- полнота использования источников</li> <li>- наличие авторской позиции</li> <li>- соответствие ответа поставленному вопросу</li> <li>- использование социального опыта, материалов СМИ, статистических данных</li> <li>- логичность изложения</li> <li>- умение сделать квалифицированные выводы и обобщения с точки зрения решения профессиональных задач</li> <li>- умение привести пример</li> <li>- опора на теоретические положения</li> <li>- владение соответствующей терминологией</li> </ul>
«5» если	требования к ответу выполнены в полном объеме
«4» если	в целом выполнены требования к ответу, однако есть небольшие неточности в изложении некоторых вопросов. Затрудняется в формулировании квалифицированных выводов и обобщений
«3» если	требования выполнены частично – пытается обосновать свою

	точку зрения, однако слабо аргументирует научные положения, практически не способен самостоятельно сформулировать выводы и обобщения, не видит связь с профессиональной деятельностью
--	---

#### **4. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

##### **4.1. Электронные учебные издания**

1. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Задачи и упражнения : учебное пособие / В. В. Власов, С. И. Митрохин, А. В. Прошкина [и др.]. — 3-е изд. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 375 с. — ISBN 978-5-4497-0657-7. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/97549.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Щербакова, Ю. В. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Ю. В. Щербакова. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 159 с. — ISBN 978-5-9758-1728-0. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/81007.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Югова, Н. В. Высшая математика. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / Н. В. Югова. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2020. — 28 с. — ISBN 978-5-7782-4111-4. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/99175.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Юмагулов, М. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения : теория и приложения / М. Г. Юмагулов. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 181 с. — ISBN 978-5-4344-0763-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/91969.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

##### **4.2. Электронные образовательные ресурсы**

1. Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт») [Электронный ресурс]. — URL: <https://urait.ru/>.
2. Электронно-библиотечная система ZNANIUM [Электронный ресурс]. — URL: <https://znanium.com/>.
3. Электронная библиотечная система «Консультант студента» [Электронный ресурс]. — URL: <https://www.studentlibrary.ru/>.
4. e-Library.ru: Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. — URL: <http://elibrary.ru/>.
5. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» [Электронный ресурс]. — URL: <http://cyberleninka.ru/>.
6. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» [Электронный ресурс]. — URL: <http://window.edu.ru/>.
7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. — URL: <http://fcior.edu.ru/>.

##### **4.3. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Обучающимся обеспечен доступ (удаленный доступ) к ниже следующим современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам:

1. Словари и энциклопедии на Академике [Электронный ресурс]. — URL: <http://dic.academic.ru>.

2. Система информационно-правового обеспечения «Гарант» [Электронный ресурс].  
– URL: <http://ivo.garant.ru/>.

#### **4.4. Комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства**

1. Лицензионное программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных приложений Microsoft Office.
2. Свободно распространяемое программное обеспечение: свободные пакеты офисных приложений Apache Open Office, LibreOffice.
3. Программное обеспечение отечественного производства: справочно-правовая система «Гарант» (Электронный периодический справочник «Система ГАРАНТ»), образовательная платформа ЮРАЙТ (Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ» Biblio-online.ru (ЭБС «Юрайт»)), электронно-библиотечная система ZNANIUM, электронная библиотечная система «Консультант студента».

#### **4.5. Оборудование и технические средства обучения**

Для реализации дисциплины (модуля) используются учебные аудитории для проведения учебных занятий, которые оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, и помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева. Допускается замена оборудования его виртуальными аналогами.

<b>Наименование учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы*</b>	<b>Оснащенность учебных аудиторий для проведения учебных занятий и помещений для самостоятельной работы оборудованием и техническими средствами обучения</b>
Учебные аудитории для проведения учебных занятий	Учебная аудитория укомплектована специализированной мебелью, отвечающей всем установленным нормам и требованиям, оборудованием и техническими средствами обучения (мобильное мультимедийное оборудование).
Помещение для самостоятельной работы	Помещение оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду РХТУ им. Д.И. Менделеева и к ЭБС.

\* Номер конкретной аудитории указан в приказе об аудиторном фонде, расписании учебных занятий и расписании промежуточной аттестации.