Демонстрационный вариант заданий для практической части предпрофессионального экзамена в рамках проекта «Инженерный класс в московской школе» на площадке РХТУ им. Д.И. Менделеева

Направление практической части: Моделирование, прототипирование, прикладная математика.
Направление подготовки: Исследовательское.

Прочитайте текст и выполните задания к нему.

Барицентрические модели в химии

Родоначальником барицентрического метода является Архимед, сформулировавший «золотое правило механики», иначе называемое правилом рычага. Он обнаружил возможность доказывать теоремы с помощью свойств центра масс (барицентра с греческого). Например, этим методом он доказал теорему о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Идеи Архимеда развили геометры Папп, Чева, Гюльден, Люиль и др. Эйлер, Лагранж, Якоби использовали в геометрии не только центр масс, но и момент инерции. Со временем математики стали использовать отрицательные и даже комплекснозначные массы. Мебиус ввел барицентрическую систему координат, не похожую ни на декартову, ни на полярную, и с ее помощью смог построить проективную геометрию. Барицентрические модели механики, получившие строгое математическое построение под названием геометрия масс, нашли применение в алгебре, топологии, вычислительной математике, интерполяции, оптимизации, статистике, электростатике, химии, металлургии, генетике, колориметрии (измерении цвета) и др. науках.

Механическая картина модели следующая. Имеются n шариков с массами m_1, m_2, …, m_n. Размеры шариков малы по сравнению с наименьшим из расстояний между ними, т.е. можно считать их материальными точками m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n. Эти шарики соединены «невесомыми» стержнями в одну жесткую систему. Если эту систему подвесить на ниточке, закрепленной в произвольной точке одного из стержней, то, скорее всего, равновесия не будет. Но есть в пространстве такая точка Z, что, закрепив ниточку в ней (предполагая, что там проходит один из стержней), произвольно повернув систему вокруг точки Z, успокоив и отпустив, мы обнаружим, что она останется в равновесии. Это и есть центр масс или барицентр. Но строгость рассуждений, принятая в математике, не потерпит «подвешивания на ниточке». Поэтому перейдем к математизации описанной наглядной картины.

Определение. Материальной точкой mA назовем точку A с сопоставленным ей числом m, называемым ее массой.

Определение. Центром масс (барицентром) системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n называется точка Z, для которой верно равенство

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$

Рассмотрим свойства центра масс.

Свойство 1. Если точка Z является центром масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n, то для любой точки O имеет место равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

и обратно: если хотя бы для одной точки *O* выполнено это равенство, то точка *Z* является центром масс системы.

Следствие. Для всякой системы конечного числа материальных точек центр масс существует и единственный.

Свойство 2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1|\overrightarrow{ZA_1}| = m_2|\overrightarrow{ZA_2}|$.

Свойство 3. Пусть в системе из *n* материальных точек *k* точек помечены и пусть *C* – центр масс помеченных материальных точек. Если помеченные точки заменить точкой *C*, которой сопоставить всю массу помеченных материальных точек, то положение центра масс всей системы не изменится.

Следствие. Пусть *Z* – центр трех масс, расположенных в вершинах треугольника *ABC*. Тогда прямая *AZ* пересекает сторону *BC* в точке *Y*, являющейся центром тех двух масс, что расположены в точках *B* и *C*.

По мысли Мебиуса, свойство 1 позволяет ввести новую, очень своеобразную и интересную систему координат, называемую барицентрической. Для любой внутренней точки *M* треугольника $A_1A_2A_3$ существуют и единственны такие положительные числа μ_1, μ_2 и μ_3, такие что $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ и при этом точка *M* является центром масс материальных точек μ_1A_1, μ_2A_2 и μ_3A_3, т.е. $M = \mu_1A_1 + \mu_2A_2 + \mu_3A_3$. Эти числа μ_1, μ_2 и μ_3 называются барицентрическими координатами точки *M* относительно треугольника $A_1A_2A_3$.

Химические системы – смеси, сплавы, растворы, химические соединения в некотором смысле аналогичны материальным точкам. Рассмотрим трехкомпонентные смеси или соединения (составленные из трех веществ, элементов или иных компонентов). Пусть из трех веществ *A*, *B* и *C* составлена смесь с общей массой m, причем на каждую единицу массы этой смеси приходится μ_1 единиц массы вещества *A*, μ_2 единиц массы вещества *B* и μ_3 единиц массы вещества *C*, тогда $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Таким образом числа μ_1, μ_2 и μ_3 соответствуют массовым долям компонентов *A*, *B* и *C*.

Определение. Массовая доля компонента (вещества, химического элемента) – содержание компонента в многокомпонентной системе (смеси веществ, растворе, молекуле), определяемое как отношение массы этого компонента к суммарной массе всех компонентов системы. Обычно массовую долю выражают в %, но не обязательно.

Возьмем произвольный треугольник *ABC* и сопоставим рассматриваемой смеси материальную точку mK, где точка *K* имеет барицентрические координаты μ_1, μ_2 и μ_3 относительно треугольника *ABC*. Пусть теперь есть две смеси. Им будут сопоставлены материальные точки m_1K_1 и m_2K_2. Если их перемешать, то возникает новая смесь, масса которой $m = m_1 + m_2$, а концентрациям веществ получившийся смеси соответствуют барицентрические координаты новой точки *K* в треугольнике *ABC*, которая будет центром масс точек m_1K_1 и m_2K_2, т.е. $mK = m_1K_1 + m_2K_2$.

Аналогично для *n* смесей, составленных из трех компонентов *A*, *B* и *C* и характеризуемых материальными точками m_1K_1, m_2K_2, …, m_nK_n, полученная смесь характеризуется материальной точкой

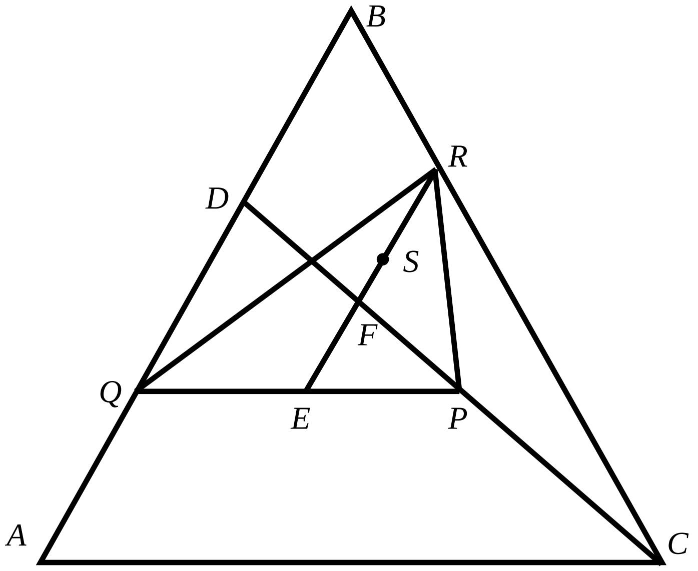
$$mK = m_1K_1 + m_2K_2 + \cdots + m_nK_n,$$

где $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Это позволяет сводить химические задачи к задачам о нахождении центра масс системы материальных точек, что нашло важные и разнообразные приложения в физико-химическом анализе.

Так же можно для изображения четырехкомпонентных смесей использовать материальные точки в тетраэдре, а для изображения многокомпонентных смесей такую роль выполняют аналоги в многомерных пространствах.

Рассмотрим *пример*. В каком соотношении следует смешать раствор *P*, содержащий 10% (массовых) вещества *A*, 20% вещества *B* и 30% вещества *C*, раствор *Q*, содержащий 40% вещества *A* и 20% вещества *B* и раствор *R*, содержащий 45% вещества *B* и 15%

вещества C для получения раствора S, содержащего эти вещества в массовом соотношении A:B:C=2:7:3?



Решение. Для расчета смешения трех веществ воспользуемся треугольной диаграммой. В растворе P вещества A в два раза меньше, чем вещества B, поэтому мы поставим точку D на отрезке AB в два раза ближе к B, чем к A и тогда точка P, соответствующая раствору P, будет находиться на отрезке CD. А так как вещества C в растворе P столько же, сколько A и B вместе взятых, то точка P является серединой отрезке CD. Точка Q, соответствующая раствору Q, будет находиться на отрезке AB в два раза ближе к A, чем к B, поскольку в растворе Q вещества A в два раза больше, чем вещества B, а вещество C отсутствует. Точка R, соответствующая раствору R, будет находиться на отрезке BC в три раза ближе к B, чем к C, поскольку в растворе R вещества B в три раза больше, чем вещества C, а вещество A отсутствует. Основная трудность заключается в описании положения точки S относительно точек P, Q и R. В данной задаче, например, можно заметить, что доля вещества C в растворе S такая же, как и в растворе R (т.е. C в 3 раза меньше, чем A и B вместе взятых). Поэтому точка S, соответствующая раствору S, будет находиться на прямой, проходящей через точку R параллельно прямой AB. Так как точка P – середина отрезка CD, то точка F, поставленная по середине отрезка PD, будет делить отрезок CD в том же отношении 3:1, как точка R делит отрезок CB. Следовательно, $FR \| AB$ и точка S находится на прямой FR. Поскольку средняя линия треугольника параллельна основанию, то точка E, поставленная по середине отрезка PQ, окажется также на прямой FR. Так как точка S оказалась на медиане треугольника PQR, то растворов P и Q нужно взять поровну. Тогда вещества A в растворе, соответствующем точке E, будет среднее арифметическое между точками P и Q, то есть (10%+40%)/2=25%, а вещества B – 20%, вещества C – (30%+0%)/2=15%. То есть в E доля вещества A составляет 25%/(25%+20%+15%)=5/12 от всех трех веществ. В точке R вещество A отсутствует. Поскольку в S доля вещества A должна составлять 2/(2+7+3)=1/6 от всех трех веществ, то точка S должна делить отрезок RE так, чтобы RS/SE=(1/6−0)/(5/12−1/6)=2/3. Следовательно, раствора R нужно взять в 3/2 раза больше, чем растворов P и Q, вместе взятых. То есть соотношение получается следующее: P:Q:R=1:1:3.

Эта задача может быть решена и аналитически. Пусть процентное содержание растворов P, Q и R в растворе S есть x, y и z, соответственно. Процентное содержание веществ в растворах P, Q и R следующее:

	Вещество A	Вещество B	Вещество C
Раствор P	a_1=10	b_1=20	c_1=30
Раствор Q	a_2=40	b_2=20	c_2=0
Раствор R	a_3=0	b_3=45	c_3=15

Процентное содержание веществ в растворе S есть a, b и c. Тогда мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a = a_1\frac{x}{100} + a_2\frac{y}{100} + a_3\frac{z}{100} \\ b = b_1\frac{x}{100} + b_2\frac{y}{100} + b_3\frac{z}{100} \\ c = c_1\frac{x}{100} + c_2\frac{y}{100} + c_3\frac{z}{100} \\ x + y + z = 100 \\ a\colon b\colon c = A\colon B\colon C \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 10\frac{x}{100} + 40\frac{y}{100} + 0\frac{z}{100} \\ b = 20\frac{x}{100} + 20\frac{y}{100} + 45\frac{z}{100} \\ c = 30\frac{x}{100} + 0\frac{y}{100} + 15\frac{z}{100} \\ x + y + z = 100 \\ a\colon b\colon c = 2\colon 7\colon 3 \end{cases}.$$

Используя последнюю строку, получаем $\begin{cases} a = 0{,}1x + 0{,}4y \\ 3{,}5a = 0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}45z \\ 1{,}5a = 0{,}3x + 0{,}15z \\ x + y + z = 100 \end{cases}.$

Тогда подставим выражение для a из первой строки во вторую и третью

$$\begin{cases} 0{,}35x + 1{,}4y = 0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}45z \\ 0{,}15x + 0{,}6y = 0{,}3x + 0{,}15z \\ x + y + z = 100 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{cases} 0{,}15x + 1{,}2y = 0{,}45z \\ 0{,}6y = 0{,}15x + 0{,}15z. \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $z = 4y - x$ и подставим в остальные уравнения:

$$\begin{cases} 0{,}15x + 1{,}2y = 1{,}8y - 0{,}45x \\ x + y + 4y - x = 100 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{cases} 0{,}6x = 0{,}6y \\ 5y = 100 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = y \\ y = 20 \end{cases}.$$

Таким образом x=20%, y=20% и z=60%. Иначе говоря, P:Q:R=1:1:3, то есть тот же результат, который был получен с помощью треугольной диаграммы.

<u>ЗАДАНИЯ.</u>

I. Вопросы по тексту.

1) В каких науках используют барицентрические модели?

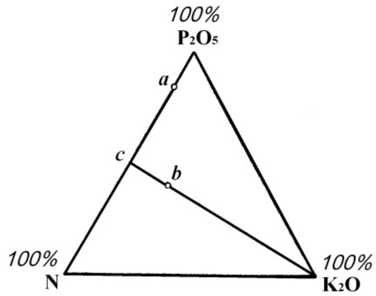
2) Что такое центр масс (барицентр) системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n ?

3) Сколько существует центров масс для всякой системы конечного числа материальных точек?

4)Можно ли для изображения пятикомпонентной смеси использовать материальные точки в тетраэдре?

II.Задача. В каком массовом соотношении следует смешать аммонизированный суперфосфат, содержащий 14% P_2O_5 и 2,5% N, сульфат аммония, содержащий 21% N, и калийную соль(сильвинит), обогащённый хлористым калием), содержащую 42% K_2O, для получения смешанного удобрения с массовым соотношением N **:** P_2O_5 **:** K_2O, равным 2 : 2 : 1 ? Какое процентное содержание аммонизированного суперфосфата, сульфата аммония и калийной соли в смешанном удобрении? РЕШИТЬ ЗАДАЧУ С ПОМОЩЬЮ ТРЕУГОЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ.

Решение. Для расчёта смешения трёх веществ (жидких или твёрдых) следует пользоваться треугольной диаграммой (рис.1). Для указанного примера вершины равностороннего треугольника соответствуют простым удобрениям, причём массовое содержание в них питательных веществ - P_2O_5, N и K_2O – принимается за 100%. Фигуративные точки, лежащие на сторонах треугольника, соответствуют составу двойных, а точки внутри треугольника – составу тройных удобрений в пересчёте на питательные вещества.



Вначале наносим на диаграмму точку $\boldsymbol{a}$, соответствующую составу аммонизированного суперфосфата (отношение отрезка N$\boldsymbol{a}$ к $P_2O_5\boldsymbol{a}$ равно отношению содержания P_2O_5 к N в аммонизированном суперфосфате, т.е. 14:2,5). Затем внутри треугольника отмечаем точку $\boldsymbol{b}$**,** соответствующую составу смешанного удобрения , и проводим через вершину треугольника. отвечающую 100% K_2O, и точку $\boldsymbol{b}$ прямую линию до пересечения со стороной N - P_2O_5 в точке c**.** Отношение длины отрезка $\boldsymbol{a}$с к cN даёт отношение количества сульфата аммония [в пересчёте на 100% N] к количеству аммонизированного суперфосфата [в пересчёте на 100% (P_2O_5 + N)]. Измерив отрезки, устанавливаем, что это отношение равно 23:33. Отношение длин отрезков $\boldsymbol{b}$c к $\boldsymbol{b}K_2O$ даёт отношение количества калийной соли [в пересчёте на 100% K_2O] к сумме сульфата аммония и аммонизированного суперфосфата [в пересчёте на 100% (N + P_2O_5)], это отношение равно 1:4. Из этих величин следует, что для получения смешанного удобрения заданного состава необходимо, чтобы исходные удобрения были взяты в массовом соотношении

калийная соль (100% K_2O) **:** сульфат аммония (100% N) **:** аммонизированный суперфосфат [100% (P_2O_5 + N)]

равном

$$1:\frac{4\cdot23}{23+33}:\frac{4\cdot33}{23+33}\approx 1: 1,643 : 2,357.$$

Разделив последние числа на процентное содержание полезных питательных веществ в каждом из исходных удобрений, получим массовое соотношение натуральных исходных удобрений в смеси:

$$\frac{1}{42}:\frac{\approx1,64}{21}:\frac{\approx2,36}{14+2,5}\approx 0,024: 0,078 : 0,143.$$

Приняв массу смеси (0,024+ 0,078+ 0,143= 0,245) за 100 %, устанавливаем, что смешанное удобрение с заданным соотношением питательных веществ должно содержать ≈9,80% калийной соли, ≈31,84% сульфата аммония и ≈58,40% аммонизированного суперфосфата.

III.Задача. В каком массовом соотношении следует смешать аммонизированный суперфосфат, содержащий 14% P_2O_5 и 2,5% N, сульфат аммония, содержащий 21% N, и калийную соль(сильвинит), обогащённый хлористым калием), содержащую 42% K_2O, для получения смешанного удобрения с соотношением N: P_2O_5: K_2O, равным 2:2:1? Какое процентное содержание аммонизированного суперфосфата, сульфата аммония и калийной соли в смешанном удобрении? РЕШИТЬ ЗАДАЧУ АНАЛИТИЧЕСКИ.

Решение. Обозначим:

требуемое массовое соотношение питательных веществ в смешанном удобрении

N **:** P_2O_5 **:** K_2O=A **:** B **:** C;

процентное содержание питательных веществ в смешанном удобрении a, b, c;

процентные содержания в трёх исходных удобрениях - a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3;

искомое процентное содержание исходных удобрений в смеси обозначим x, y, z.

Для вычисления шести неизвестных (a, b, c, x, y, z) составляем систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} a = a_1\dfrac{x}{100} + a_2\dfrac{y}{100} + a_3\dfrac{z}{100} \\ b = b_1\dfrac{x}{100} + b_2\dfrac{y}{100} + b_3\dfrac{z}{100} \\ c = c_1\dfrac{x}{100} + c_2\dfrac{y}{100} + c_3\dfrac{z}{100} \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{A}{B} \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{A}{C} \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

В рассматриваемом примере заданы следующие величины:

A=2; a_1 =2,5; b_1 =14; c_1 =0;
B=2; a_2 =21; b_2 =0; c_1 =0;
C=1; a_3 =0; b_3 =0; c_1 =42.

Подставляя их в уравнения, получим:

$$\begin{cases} a = 2{,}5\frac{x}{100} + 21\frac{y}{100} + 0 \\ b = 14\frac{x}{100} + 0 + 0 \\ c = 0 + 0 + 42\frac{z}{100} \\ \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{c} = 2 \\ x + y + z = 100 \end{cases};\quad \begin{cases} 100a = 2{,}5x + 21y \\ 100b = 14x \\ 100c = 42z \\ b = a \\ c = \frac{a}{2} \\ z = 100 - x - y \end{cases};\quad \begin{cases} 100a = 2{,}5x + 21y \\ 100a = 14x \\ 100\frac{a}{2} = 42(100 - x - y) \\ b = a \\ c = \frac{a}{2} \\ z = 100 - x - y \end{cases}$$

Решаем теперь систему трёх уравнений с тремя неизвестными *a*, *x*, *y*:

$$\begin{cases} 100a = 2{,}5x + 21y \\ 100a = 14x \\ 50a = 42(100 - x - y) \end{cases};\quad \begin{cases} 0 = -11{,}5x + 21y \\ a = \frac{14x}{100} \\ 50\frac{14x}{100} = 4200 - 42x - 42y \end{cases}$$

Можем решить систему двух уравнений с двумя неизвестными *x*, *y*:

$$\begin{cases} 11{,}5x = 21y \\ 49x = 4200 - 42y \end{cases};\quad \begin{cases} x = \frac{21y}{11{,}5} \\ 49\frac{21y}{11{,}5} = 4200 - 42y \end{cases};\quad \begin{cases} x = \frac{21y}{11{,}5} \\ 1512y = 48300 \end{cases};\quad \begin{cases} x \approx 58{,}33 \\ y \approx 31{,}94 \end{cases}$$

Возвращаемся к другим неизвестным:

a≈ 8,1662; b≈ 8,1662; c≈ 4,0831; z≈9,73.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Максимальное количество баллов - 60

1. **Вопросы по тексту. Максимально 12 баллов (4 вопроса по 3 балла максимально)**.

Критерии по каждому вопросу:
0 баллов - ответ не дан или дан строго неверно;
1 балл - ответ дан неполностью либо с существенными недостатками;
2 балла - ответ дан верно с несущественными погрешностями;
3 балла - ответ дан верно и полно.

2. **Задание II. Максимально 24 балла:**

0 баллов - нет идеи решения
1 - 2 балла - треугольная диаграмма представлена неверно;
3 – 8 баллов - представлена правильно выполненная треугольная диаграмма, но некорректно сняты значения с диаграммы;
9 – 16 баллов - представлена правильно выполненная треугольная диаграмма, корректно сняты значения с диаграммы, но неверно получено массовое соотношение натуральных исходных удобрений в смеси;
17 – 23 баллов - представлена правильно выполненная треугольная диаграмма, корректно сняты значения с диаграммы, получено верное массовое соотношение компонентов смеси, но неверно получено процентное соотношение натуральных исходных удобрений в смеси;
24 балла – представлена правильно выполненная треугольная диаграмма, корректно сняты значения с диаграммы, получено верное массовое соотношение натуральных исходных удобрений в смеси и найдено правильно процентное соотношение натуральных исходных удобрений в смеси.

3. **Задание III. Максимально 24 балла:**

0 баллов - нет идеи решения
1 – 2 балла –есть рассуждения, не приводящие к математической модели;
3 – 8 баллов - получена математическая модель в виде системы уравнений, но допущены ошибки в коэффициентах уравнений;
9 – 16 баллов - верно составлена математическая модель в виде системы уравнений, но нет её решения;
17 – 23 баллов - верно составлена математическая модель в виде системы уравнений, но решение получено неверно.
24 балла - верно составлена математическая модель в виде системы уравнений, получено правильное решение.